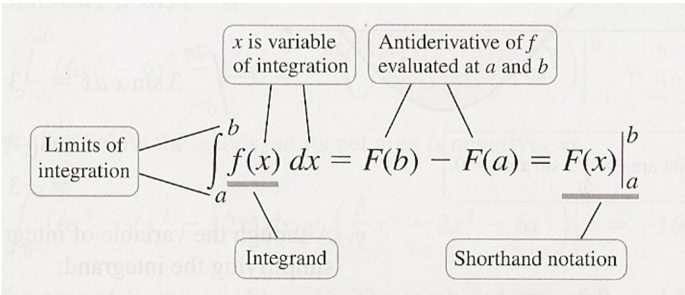
# LES FONCTIONS

**Note: Les questions des exercices ne constituent que la trame principale de ce que vous devez faire pour vous guider, rien n'interdit bien sûr que vous alliez plus loin, que vous testiez d'autres choses, bref que vous expérimentiez…**

## Exercice 1 : INTEGRATION NUMERIQUE

Le concept d'intégrale joue un rôle fondamental en mathématiques et bien sûr dans les sciences naturelles (physique, chimie, sciences de l'ingénieur, biologie etc..). Vous connaissez tous le théorème fondamental du calcul qui permet de calculer l'intégrale d'une fonction :




La difficulté consiste à déterminer la primitive (antiderivative en anglais) $F$ de la fonction $f$. Il est très souvent difficile voire impossible de déterminer $F$ c'est pourquoi les scientifiques déterminent les intégrales de façon approchée (quand même très précise) par un calcul numérique.
On peut calculer de façon approchée l'intégrale par la méthode dite de Simpson :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{3n}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n/2} f\left(a+(2i-1)h\right)+2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(a+2ih)\right)}$$

Ici, $h=\dfrac{(b-a)}{n}$ et $n$ doivent être des entiers pairs.

L'objectif de cet exercice est d'écrire une fonction $\mathtt{Simpson}(f,a,b,n)$ qui retourne le côté droit de la relation encadrée.

Ecrire un programme avec entre autres la fonction Simpson qui permettra d'évaluer $\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx$, dont la valeur exacte est 2, pour $n=2,6,12,100,500$. Le programme devra pour chaque cas afficher la valeur approchée de l'intégrale ainsi que l'erreur par rapport à la valeur exacte. Conclusion.

## Exercice 2 : CALCULER LA VITESSE ET L'ACCELERATION A PARTIR DE LA POSITION POUR UNE TRAJECTOIRE EN 2D

On considère un objet qui se déplace dans le plan $xy$ tel que à l'instant $t$ l'objet se trouve au point $\left(x(t),y(t)\right)$. Le **vecteur vitesse** à l'instant $t$ peut être approximé par :

$$v(t)\approx\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t-\Delta t)}{2\Delta t},\frac{y(t+\Delta t)-y(t-\Delta t)}{2\Delta t}\right).$$

Le **vecteur accélération** dans le plan à l'instant $t$ peut être approximé par :

$$a(t)\approx\left(\frac{x(t+\Delta t)-2x(t)+x(t-\Delta t)}{\Delta t^2},\frac{y(t+\Delta t)-2y(t)+y(t-\Delta t)}{\Delta t^2}\right).$$

Ici, $\Delta t$ est un petit intervalle de temps.

**a)** Vérifier que lorsque $\Delta t \to 0$, on retrouve bien $v(t) = (x'(t), y'(t))$ et $a(t) = (x''(t), y''(t))$.

**b)** Ecrire une fonction $\mathtt{Cinematique}(x, y, t, dt)$ (ici $dt$ correspond à $\Delta t$) pour calculer la vitesse et l'accélération d'un objet à partir des relations précédentes. La fonction doit retourner un 2-tuples (ou lists) contenant la position, la vitesse et l'accélération pour chaque instant $t$.

**c)** De nombreuses courbes fascinantes sont générées par un point sur une roue en mouvement. Le mouvement de la valve d'une roue de vélo est nommé une **cycloïde** et est décrit par la courbe paramétrée suivante :

$$x(t) = c(t - sin(t)),\ y(t) = c(1 - \cos(t)) \quad \text{pour } t \geq 0 \text{ et } c = cste$$

La figure 12.11 représente le graphe d'une cycloïde pour $c = 1$ et $0 \leq t \leq 3\pi$. Lorsque la roue fait une révolution dans l'intervalle $0 \leq t \leq 2\pi$, on obtient une arche de la cycloïde.

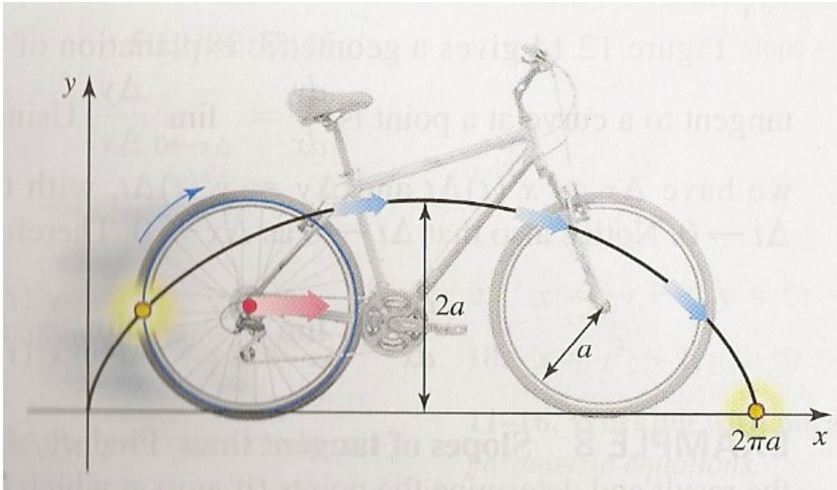


FIGURE 12.10

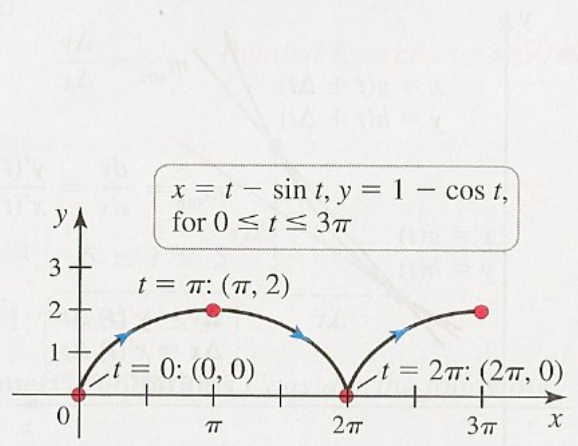


FIGURE 12.11

**d)** Utiliser votre fonction Cinematique dans un programme avec la courbe paramétrique de la cycloïde pour $a = 1$. Tester le programme en calculant, pour $t = 1$ par exemple, la vitesse et l'accélération avec $\Delta t = 10^{-5}$. Vérifier et comparer vos résultats avec un calcul à la main.

**e)** Vérifier que pour $t = 2\pi n$ avec $n = 0,1,2,...$ la vitesse du point s'annule. Que vaut son accélération ?