LA METHODE DE DICHOTOMIE OU METHODE DE LA BISSECTION

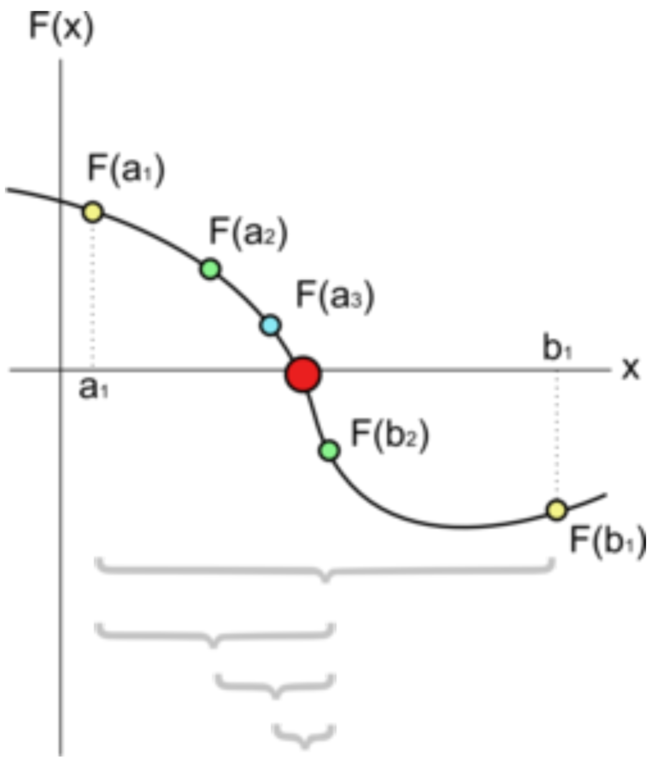
Note: Les questions des exercices ne constituent que la trame principale de ce que vous devez faire pour vous guider, rien n'interdit bien sûr que vous alliez plus loin, que vous testiez d'autres choses, bref que vous expérimentiez…

INTRODUCTION

L'objectif de ce TD est de déterminer **le zéro d'une fonction non linéaire** (que l'on ne peut pas déterminer à la main). Pour cela vous allez écrire un algorithme de recherche basé sur **la méthode de dichotomie ou méthode de la bissection**. Vous allez revoir cela plus en détail dans le cours d'informatique. Ce TD constitue donc une première approche. L'algorithme consiste à répéter des partages d'un intervalle en deux parties puis à sélectionner le sous-intervalle dans lequel existe un zéro de la fonction.

PRINCIPE

On considère deux nombres a et b et une fonction f continue sur l'intervalle $[a,b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. Supposons que nous voulions résoudre l'équation $f(x)=0$. Vous savez **d'après le théorème des valeurs intermédiaires** que f doit avoir au moins un zéro dans l'intervalle $[a,b]$. La méthode de dichotomie consiste à diviser l'intervalle en deux en calculant $c=\frac{(a+b)}{2}$. Il y a maintenant deux possibilités : ou $f(a)$ et $f(c)$ sont de signes contraires, ou $f(c)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. L'algorithme de dichotomie est alors appliqué au sous-intervalle dans lequel le changement de signe se produit, ce qui signifie que l'algorithme de dichotomie est en soi récursif.



Étapes successives de la méthode de dichotomie avec comme point de départ, l'intervalle $[a_1,b_1]$. Le zéro de la fonction est en rouge.

MISE EN OEUVRE

✔ Pour approcher le zéro, vous aller répéter n étapes successives. On souhaite que le zéro se trouve dans un intervalle de taille maximale ε. Après n itérations, la longueur de l'intervalle est $2^{-n}(b-a)$ si $[a,b]$ est l'intervalle initial. L'intervalle est suffisamment petit si $2^{-n}(b-a)=\varepsilon$ donc $n=-(\ln\varepsilon-\ln(b-a))/\ln 2$.

✔ Au lieu de calculer n, on peut simplement stopper l'itération quand la longueur de l'intervalle est inférieure à ε. La boucle va être naturellement implémentée par une boucle de test `while` pour $(b-a) \leq \varepsilon$.

✔ Pour rendre l'algorithme plus correct, on peut aussi insérer un test pour s'assurer que $f(x)$ change réellement de signe sur l'intervalle d'étude $[a,b]$.

<u>Vous devez réaliser le cahier des charges suivant :</u>

⇒ Avant de vous lancer sur votre clavier, écrivez sur un papier la structure de votre algorithme.

⇒ Votre programme devra contenir la fonction `dichotimie (f, a, b, eps)` où `esp` pour epsilon, la taille finale de votre intervalle. Cette fonction contiendra l'algorithme. La fonction dichotomie devra elle-même faire appel à une fonction `f(x)` qui définit l'expression mathématique de la fonction dont vous devez chercher le zéro.

⇒ Votre programme devra afficher à l'écran pour chaque itération la valeur de l'intervalle d'étude puis à la fin le nombre d'intervalles nécessaires et bien sûr la valeur approchée du zéro.

⇒ Tester votre programme sur un cas simple comme $f(x) = 2x - 3$.

⇒ Appliquer votre programme pour résoudre l'équation suivante $cx = \tanh x$ où c est une constante comprise entre $]0,1]$. Cette équation intervient dans l'étude des propriétés magnétiques des solides et en particulier dans la recherche de la température (dite de Curie) de transition entre la phase paramagnétique et la phase ferromagnétique (cf. figure ci-dessous). Vous pouvez au préalable faire une étude graphique pour essayer de comprendre ce qui va se passer.

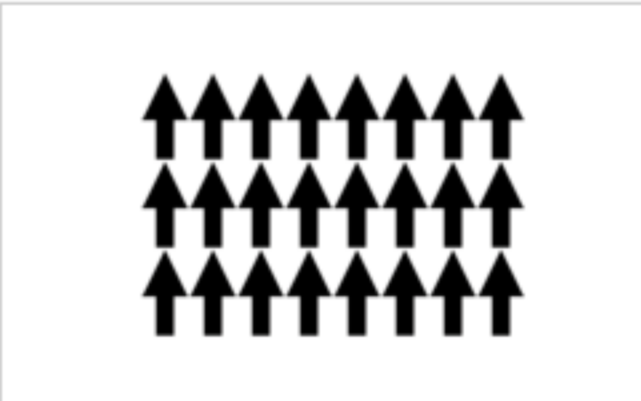


Figure 1 Below the Curie temperature, neighbouring magnetic spins align in a ferromagnet in the absence of an applied magnetic field.

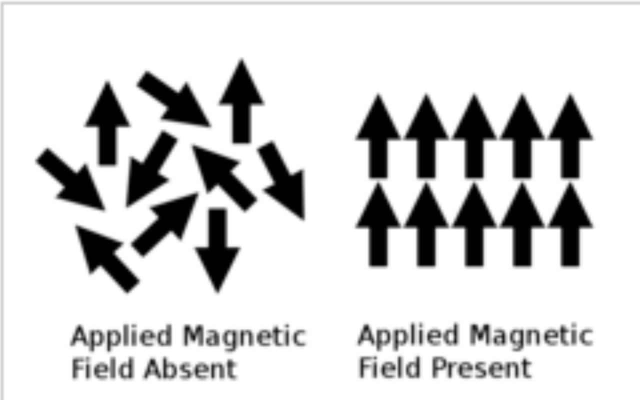


Figure 2 Above the Curie temperature, the magnetic spins are randomly aligned in a paramagnet unless a magnetic field is applied.