MODELE DE POPULATION : EQUATION LOGISTIQUE

Note: Les questions des exercices ne constituent que la trame principale de ce que vous devez faire pour vous guider, rien n'interdit bien sûr que vous alliez plus loin, que vous testiez d'autres choses, bref que vous expérimentiez…

1 • INTRODUCTION

Dans cette séance de TD, nous allons utiliser Scilab pour résoudre numériquement une équation différentielle d'ordre 1 avec une condition initiale particulière :

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0 .$$

L'objectif étant de « déterminer » la fonction $y(t)$ qui prend la valeur y_0 à l'instant t_0.

✓ Si la fonction $f(t,y)$ peut s'écrire comme un produit de deux fonctions : $f(t,y) = g(t)h(y)$, l'une dépendant uniquement de t et l'autre uniquement de y, on dit que **l'équation différentielle est séparable**. Nous avons souvent rencontré ce type d'équation différentielle dans le cours de sciences physiques ce qui nous a permis d'utiliser la méthode de séparation des variables pour trouver une solution.

✓ Si l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dy}{dt} = h(y),$$

le temps n'intervenant plus dans le second membre, **l'équation différentielle est dite autonome**. Nous allons nous intéresser uniquement à ce cas dans ce TD. En effet, comme nous avons pu le voir dans le cours de sciences physiques, ce type d'équation différentielle apparaît très souvent dans la modélisation de nombreux problèmes.

2 • MODELISATION : EVOLUTION D'UNE POPULATION AVEC RESSOURCES LIMITEES

Dans un modèle simple d'évolution d'une population animale quelconque qui tient compte des ressources limitées de l'environnement, nous allons faire les hypothèses suivantes :

- Si la population est faible, le taux d'accroissement de cette dernière est proportionnel à sa taille.
- Si la population est trop importante pour être viable du point de vue des ressources environnementales, la population va décroître, son taux d'accroissement est négatif.

Pour ce modèle nous allons utiliser les grandeurs suivantes :

t = temps (variable indépendante)

P = population (variable dépendante)

k = coefficient d'accroissement pour une population faible (paramètre)

Cependant, notre hypothèse à propos des ressources limitées nécessite l'introduction d'un autre paramètre dans le cas d'une population importante, nous allons la noter N . Cette variable correspond à la charge maximale (population maximale) supportable par l'environnement. Ainsi nous allons supposer que si $P(t) < N$, la population croît et que si $P(t) > N$, la population décroît.

On peut à présent affiner nos hypothèses :

1. $\frac{dP}{dt} \approx kP$ si P est petit.

2. Si $P > N$, $\frac{dP}{dt} < 0$.

Nous voulons une expression algébrique la plus simple possible qui satisfasse les deux propositions précédentes. Nous pouvons essayer l'expression suivante :

$$\frac{dP}{dt} \approx k\left(\text{quelque chose}\right)P.$$

Nous voulons que le « $\left(\text{quelque chose}\right)$ » soit proche de 1 quand la population est faible mais si $P > N$, nous voulons que $\left(\text{quelque chose}\right)$ soit négatif. L'expression la plus simple qui satisfasse ces deux propositions est la suivante :

$$\left(\text{quelque chose}\right) = \left(1 - \frac{P}{N}\right).$$

Cette expression vaut 1 si $P = 0$ et est négative si $P > N$. On arrive ainsi à notre modèle dit **équation logistique de la population** :

$$\boxed{\frac{dP}{dt} \approx k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P}$$

Il s'agit d'une équation **différentielle d'ordre 1 autonome** mais **non linéaire** puisque le second membre est une équation algébrique d'ordre 2 en P.

3 • ANALYSE QUALITATIVE

<u>NOTE :</u> Il ne faut pas hésiter à utiliser l'aide de Scilab pour la syntaxe des différentes commandes que vous allez utiliser.

La fonction $f\left(P\right) = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P$ représente le taux de variation de la population (la pente). On peut tirer des informations qualitatives importantes sur l'évolution de $P\left(t\right)$ sans connaître exactement sa forme analytique (si on peut la trouver !). En effet, la connaissance des régions où dP/dt est nulle, positive ou négative apporte beaucoup.

a) Tracez la fonction $f\left(P\right)$. On prendra $k = 0{,}4$ et $N = 200$ (vous pouvez modifier ces valeurs). Utilisez en particulier les commandes `function`, `endfunction` et `plot`.

b) Pour quelles valeurs de P la population est-elle en équilibre, augmente et diminue ?

c) En chaque point du plan $\left(P,t\right)$, tracez le champ de vecteur correspondant à dP/dt qui va nous informer localement sur le taux de variation de P. Utilisez pour cela la commande `champ`.

d) Que peut-on dire de ce champ de vecteurs à différents instants ?

4 • ANALYSE QUANTITATIVE

a) Résolvez l'équation différentielle numériquement pour les conditions initiales suivantes : $\left(t_0 = 0, P_0 = 0\right)$, $\left(t_0 = 0, P_0 = 50\right)$, $\left(t_0 = 0, P_0 = 200\right)$ et $\left(t_0 = 0, P_0 = 300\right)$. Vous pouvez bien sûr changer ces valeurs. Il faut utiliser la commande `ode` pour la résolution numérique d'équations différentielles. Tracez sur un même graphe $P\left(t\right)$ pour les différentes conditions initiales.

b) Analysez les courbes obtenues.

5 • EQUATION LOGISTIQUE MODIFIEE

On considère à présent l'équation logistique modifiée (plus réaliste biologiquement) suivante :

$$\boxed{\frac{dP}{dt} \approx k\left(1-\frac{P}{N}\right)\left(\frac{P}{M}-1\right)P}$$

a) On prend $M = 70$. Résolvez l'équation différentielle numériquement pour les conditions initiales suivantes :

$$(t_0 = 0, P_0 = 0), (t_0 = 0, P_0 = 20), (t_0 = 0, P_0 = 60), (t_0 = 0, P_0 = 100), (t_0 = 0, P_0 = 150) \text{ et } (t_0 = 0, P_0 = 300).$$

Vous pouvez bien sûr changer ces valeurs. Il faut utiliser la commande ode pour la résolution numérique d'équations différentielles. Tracez sur un même graphe $P(t)$ pour les différentes conditions initiales.

b) Analysez les courbes obtenues. Quelle est la signification « biologique » du paramètre M ?