SYSTEME DE LORENZ ET CHAOS

Note: Les questions des exercices ne constituent que la trame principale de ce que vous devez faire pour vous guider, rien n'interdit bien sûr que vous alliez plus loin, que vous testiez d'autres choses, bref que vous expérimentiez…

1 • INTRODUCTION

Le comportement d'un système physique comme le climat à la surface de la Terre est extrêmement complexe. Pour prédire le climat (la météo), de nombreux modèles mathématiques ont été développés. Les relevés des stations météo et des satellites sont utilisés pour connaître les conditions initiales et la résolution approchée numérique des équations différentielles est utilisée pour les prédictions futures.
Le succès d'une prédiction de la météo à long terme (au delà de 5 jours) est limité. Ce manque de précision peut être dû au manque de précision du modèle. Il est aussi possible que le modèle soit précis mais que des propriétés des équations différentielles rendent la prédiction difficile. C'est pourquoi il est important d'étudier les modèles d'un point de vue théorique et d'un point de vue numérique.
Le climat étant si complexe à décrire, il est nécessaire de commencer une étude théorique par un modèle élémentaire. C'est ainsi qu'après de nombreuses simplifications (mûrement réfléchies), le météorologiste (et mathématicien) Edward Lorenz (cf. paragraphe 3) arriva au système d'équations différentielles suivant :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma\left(y-x\right) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta z + xy \end{aligned}}$$

où x, y et z sont les variables dépendantes du temps et σ, ρ et β des paramètres. Il n'est pas utile pour nous de savoir ce que représentent physiquement les variables dépendantes (elles décrivent la dynamique de circulation d'un fluide). De plus ce système est si simple par rapport à un modèle météorologique réellement utilisé qu'il ne nous dira rien sur la température qu'il fera demain. Cependant, en étudiant ce système, Lorenz contribua fortement à une révolution scientifique en attirant l'attention des scientifiques et ingénieurs sur un nouveau champ des mathématiques nommé à présent la théorie du chaos.[1][2]

2 • RESOLUTION NUMERIQUE

Lorenz choisit d'étudier son système avec les valeurs des paramètres suivants :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma &= 10 \\ \beta &= 8/3 \\ \rho &= 28 \end{aligned}}$$

Notre objectif est de résoudre le système d'équation de Lorenz de façon numérique à partir de conditions initiales données et de visualiser la trajectoire 3D de ce système en fonction du temps.

[1] *La théorie du chaos* par James Gleick (Flammarion) pour une approche grand public de la théorie du chaos et de son histoire, passionnant, un classique !
[2] *Dieu joue-t-il aux dés ? Les mathématiques du chaos* par Ian Stewart (Flammarion) pour ceux qui demandent à en savoir plus, tout en n'étant pas prêts aux travaux vraiment techniques comme votre enseignant !

a) On part des conditions initiales suivantes : $x(0)=0; y(0)=1; z(0)=0$. On prendra un intervalle de temps de 0,01 sur une durée de 50 environ. Après avoir résolu le système numériquement grâce à la commande `ode`, tracez le résultat à l'aide de la fonction `param3d`. Tracez également à l'aide de la fonction `plot` l'évolution temporelle du paramètre x.

b) Que vous inspirent les courbes solutions ?

c) Reprendre la question a) avec comme conditions initiales : $x(0)=0; y(0)=1{,}001; z(0)=0$.

d) Comparez les courbes obtenues en les traçant sur le même graphe. Quelles conclusions pouvez-vous en tirer ?

3 • EDWARD N. LORENZ (Source Wikipédia)

Edward Norton Lorenz est un scientifique américain né le 23 mai 1917 à West Hartford, dans le Connecticut, décédé le 16 avril 2008 à Cambridge. Travaillant comme météorologue au Massachusetts Institute of Technology, il découvre par hasard, en 1963, que l'on peut obtenir un comportement chaotique avec seulement trois variables, soit un système non linéaire à trois degrés de liberté. Il montre ainsi qu'une dynamique très complexe peut apparaître dans un système formellement très simple. L'appréhension des rapports du simple et du complexe s'en trouve profondément bouleversée. En particulier, on s'aperçoit que la complexité peut être intrinsèque à un système, alors que jusque-là on la rapportait plutôt à un caractère extrinsèque, accidentel, lié à une multitude de causes.

Chez Lorenz, l'intervention de l'ordinateur est cruciale. La sensibilité aux conditions initiales est en effet révélée par le biais de l'instabilité d'un calcul numérique et c'est en 1972 qu'Edward Lorenz présente l'effet papillon devant l'Association Américaine pour le progrès des Sciences avec une célèbre question : « Le battement d'aile d'un papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas ? » Mais, surtout, Lorenz exhibe sur son écran d'ordinateur l'image surprenante de son attracteur. Dans ses travaux de mécanique céleste, comme dans son livre *Science et méthode*, Henri Poincaré en avait eu l'intuition, mais il n'avait pas de moyens de calcul à sa disposition. Lorenz, lui, explique sa construction par des procédures itératives et la donne à voir.

Il faudra ensuite près de quinze ans pour que ces résultats soient compris et assimilés par des groupes scientifiques différents, des météorologues aux mathématiciens, des astronomes aux physiciens, aux biologistes des populations, etc. Il reçoit en 2004 la Médaille Buys Ballot pour son apport à la météorologie.
La rumeur veut que ce soit le café qui ait fait découvrir à Lorenz le phénomène de chaos. À cette époque, Lorenz passait de nombreuses heures à tenter de prédire le temps ; pour ce faire il utilisait un des premiers ordinateurs au monde, le Royal McBee LGP-300. Or donc, sa méthode consistait à rentrer dans l'ordinateur un certain nombre de paramètres déterminés au millionième près (soit six chiffres après la virgule), de lancer la machine à l'aide d'algorithmes et de programmes de son cru, et d'interpréter les résultats (à savoir, une colonne de chiffres). Son protocole supposait de le faire deux fois pour chaque série de paramètres, dans un but de vérification. Cependant, on raconte qu'un jour, ayant une subite envie de café frais, Lorenz décida d'accélérer la deuxième manœuvre en ne rentrant ses paramètres cette fois-ci qu'avec une précision au millième (trois chiffres après la virgule). S'étant désaltéré, il retourna à son travail, s'attendant à obtenir une colonne de chiffres légèrement différente de la première obtenue avec les mêmes paramètres déterminés à 10^{-6} près. Or, surprise, la deuxième colonne affiche des résultats largement différents de la première. Lorenz revérifie chaque colonne plusieurs fois, et retente l'expérience en rentrant les chiffres au dixième, au centième, au dix-millième près. À chaque fois, les résultats obtenus sont très éloignés de ceux obtenus au millionième.

C'est ainsi que Lorenz découvrit le principe fondateur de la théorie du chaos, à savoir *qu'une infime variation de paramètre à un moment donné peut faire varier énormément le résultat final.*