# EQUATIONS DIFFERENTIELLES SYSTEME D'ORDRE 1

**Note: Les questions des exercices ne constituent que la trame principale de ce que vous devez faire pour vous guider, rien n'interdit bien sûr que vous alliez plus loin, que vous testiez d'autres choses, bref que vous expérimentiez…**

## PROBLEME 1: LE PENDULE SIMPLE

On considère un pendule simple de masse $m$, de longueur $\ell$ qui va osciller d'arrière en avant à cause du champ de gravité de la Terre $\vec{g}$. La seconde loi Newton, le théorème du moment cinétique ou le théorème de l'énergie mécanique donne l'équation différentielle suivante qui gouverne l'évolution de l'angle $\theta$ par rapport à la verticale (il faut savoir établir cette équation par les trois méthodes, essayez !) :

$$\boxed{\ddot{\theta}(t)+\alpha\sin\theta(t)=0 \quad (1)}$$

où $\alpha \equiv g/\ell$. La fonction inconnue à déterminer $\theta(t)$ nous donne accès à la position de la masse, à sa vitesse, à son accélération et à la tension de la corde.
L'objectif de ce TD est de résoudre numériquement, par la méthode d'Euler, cette équation quand $\sin\theta = \sin\theta$ !!, nous savons bien (j'espère) résoudre analytiquement cette équation quand $\theta << 1$, on retrouve alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.
Nous allons transformer cette équation différentielle d'ordre 2 en deux équations différentielles d'ordre 1 afin de pouvoir utiliser simplement la méthode d'Euler. En posant $\omega(t)=\dot{\theta}(t)$ la vitesse angulaire du pendule, on obtient le système de deux fonctions inconnues suivant :

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\theta}(t)&=\omega(t) \quad (2)\\ \dot{\omega}(t)&=-\alpha\sin\theta(t) \quad (3)\end{aligned}}$$

Pour résoudre ce système nous devons connaître les deux conditions initiales suivantes :

$$\theta(0)=\theta_0$$
$$\omega(0)=\omega_0$$

Nous souhaitons calculer la solution pour $t=0$ à $t=T$ avec $T>0$. Soit $n \geq 1$ un entier, on définit l'intervalle (le pas de calcul) par :

$$\Delta t \equiv T/n$$

On note $(\theta_k,\omega_k)$ les solutions approchées correspondant aux solutions exactes $(\theta(t_k),\omega(t_k))$ pour $k = 0, 1, \ldots\ n$. La méthode d'Euler qui consiste à remplacer la dérivée par un taux d'accroissement fini donne :

$$\frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{\Delta t}=\omega_k$$
$$\frac{\omega_{k+1}-\omega_k}{\Delta t}=-\alpha\sin(\theta_k)$$

On peut réécrire les équations ci-dessus de façon plus commode pour l'écriture du code :

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{\text{Méthode d'Euler}}\\ \theta_{k+1}=\theta_k+\Delta t\times\omega_k\\ \omega_{k+1}=\omega_k-\alpha\times\Delta t\times\sin\left(\theta_k\right)\end{array}}$$

Votre travail consiste à taper un script nommé par exemple pendule-simple.py qui permette de déterminer pour chaque instant $\left(\theta_k,\omega_k\right)$.

Pour cela votre code devra contenir une fonction pendule (T, n, theta0, omega0, alpha) qui contient les paramètres d'entrée ($T$, $n$, $\theta_0$, $\omega_0$, $\alpha$) et qui retourne les variables de type array de dimension $n$ : theta, omega et t correspondant respectivement à $\theta_k$, $\omega_k$ et $t$.

Vous tracerez ***les courbes*** $\theta(t)$ et $\omega(t)$ ainsi que le ***portrait de phase*** en utilisant la fonction plot.

Vous pouvez tester votre programme avec par exemple les paramètres suivants : $\theta_0=\pi/6$, $\omega_0=0$, $\alpha=5$, $T=10$ et $n=1000$. Vous êtes bien sûr ***invités à modifier ces paramètres*** pour expérimenter. En particulier il sera intéressant de superposer les courbes pour deux cas : un angle faible et un angle plus important. Concluez.

Pour utiliser les array et la fonction plot sous Python, il faut penser à importer la bibliothèque numpy et matplotlib.pyplot (voir le TD 4 d'informatique).

## *PROBLEME 2: MODELE DE PROPAGATION DE LA GRIPPE*

Les modèles mathématiques sont très utilisés pour comprendre la propagation des maladies infectieuses. Nous allons considérer le cas simple d'une population constante constituée de deux groupes : la population $(S)$ susceptible d'être contaminée et la population infectée $(I)$ qui porte la maladie et qui est capable de la transmettre.

Un modèle biologique donne le système d'équations différentielles qui gouverne ces populations :

$$\boxed{\begin{array}{ll}\dot{S}(t)=-r\,S(t)I(t) & (4)\\ \dot{I}(t)=r\,S(t)I(t)-a\,I(t) & (5)\end{array}}$$

où $r$ et $a$ sont des paramètres constants liés à l'épidémie. Pour résoudre ce système nous devons connaître les deux conditions initiales suivantes :

$$S(0)=S_0$$
$$I(0)=I_0$$

Nous souhaitons calculer la solution pour $t=0$ à $t=T$ avec $T>0$. Soit $n\geq 1$ un entier, on définit l'intervalle (le pas de calcul) par :

$$\Delta t\equiv T/n$$

On note $\left(I_k,S_k\right)$ les solutions approchées correspondant aux solutions exactes $\left(I(t_k),S(t_k)\right)$ pour $k=0,\ 1,\ \ldots\ n$.

La méthode d'Euler qui consiste à remplacer la dérivée par un taux d'accroissement fini donne (montrez-le) :

**Méthode d'Euler**

$$S_{k+1} = S_k - \Delta t \times r \times S_k \times I_k$$

$$I_{k+1} = I_k + \Delta t \times \left(r \times S_k \times I_k - a \times I_k\right)$$

⌨ En suivant la même démarche que pour le problème 1, tapez un script nommé par exemple epidemie.py qui permette de déterminer pour chaque instant $\left(S_k, I_k\right)$.

Vous appliquerez votre code au cas concret suivant. En 1978, une épidémie de grippe a touché une école britannique de 763 garçons. L'épidémie a débuté le 21 janvier et s'est terminée le 4 février. Vous prendrez donc $T = 14$, $S_0 = 762$, $I_0 = 1$, $r = 2{,}18 \times 10^{-3}$, $a = 0{,}44$ et $n = 1000$ (données par Murray *et al*, British Medical Journal, 4 ars 1978)

Tracez les courbes $S(t)$ et $I(t)$. Analysez et concluez. Vous pouvez essayer de voir ce qu'il se passe si vous modifiez les paramètres $r$ et $a$.