MOUVEMENT A FORCE CENTRALE

Exercice 1) Trajectoire d'un satellite

Utiliser la méthode d'Euler pour déterminer et tracer la **trajectoire d'un satellite dans le champ de gravité d'un astre** avec et sans frottement. On prendra :

⇒ Force de gravité : $-\frac{\vec{r}}{r^3}$ c'est-à-dire $GMm = 1$ et $m = 1$.

⇒ Force de frottement : $-k\vec{v}$ avec $k = 0{,}1$.

⇒ Conditions initiales : $x = 0{,}5$; $y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = 1{,}63$. Vous pouvez ensuite changer les valeurs initiales si votre programme fonctionne. Le mouvement est plan, la variable z n'intervient pas.

⇒ $\text{pas} = 0.1$, on peut ensuite le diminuer pour être plus précis.

(voir annexe pour plus d'information)

Exercice 2) Diffusion de Rutherford

Reprendre l'exercice 1) en prenant cette fois une force répulsive du type $+\frac{\vec{r}}{r^3}$ (force électrostatique entre deux charges de même signe) et aucun frottement. La trajectoire obtenue représente par exemple la diffusion de particules alpha (noyau d'hélium) sur une mince feuille d'or (répulsion électrostatique) (expérience de Rutherford réalisée en 1911 et qui a mise en évidence l'existence de noyaux au sein de l'atome).

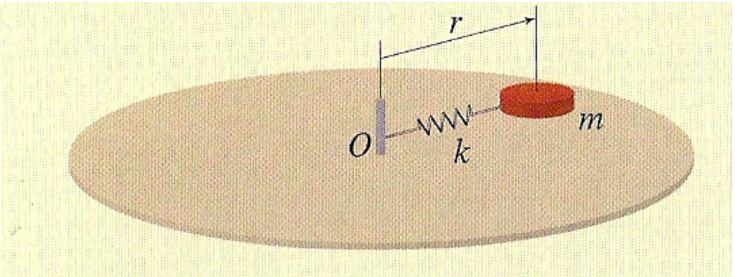
Exercice 3) Disque attaché à un ressort et libre de tourner

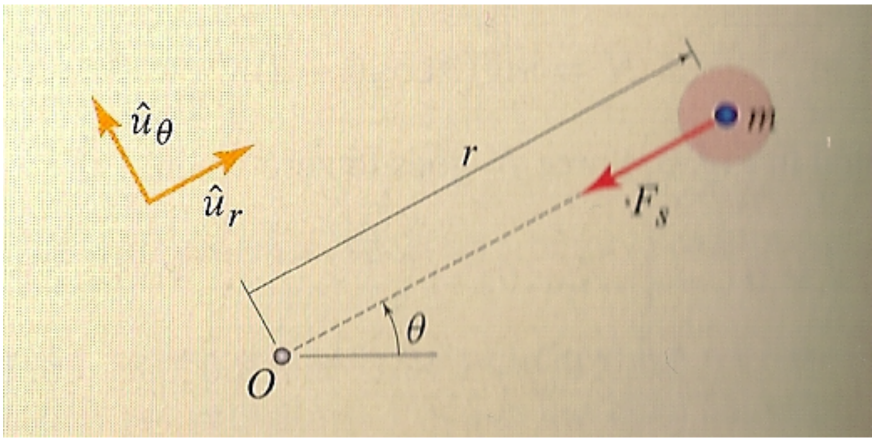
On considère un disque de masse m attaché à un ressort. L'autre extrémité du ressort est liée à une tige libre de tourner. Le disque est libre de se mouvoir sans frottement sur le plan horizontal. Le ressort a une constante de raideur k et une longueur à vide r_0.

Montrez, par application de la seconde loi de Newton, dans le système de coordonnées polaires, que la masse est régie par le système d'équations différentielles suivant :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}\left(r - r_0\right) = 0$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$





On part des conditions initiales suivantes :

$$r(0) = 0{,}35 \text{ m},\ \theta(0) = 0 \text{ rad},\ \dot{r}(0) = 0 \text{ m.s}^{-1},\ \dot{\theta}(0) = 0{,}5 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } r_0 = 0{,}25 \text{ m}.$$

Tracez la trajectoire du disque pour les quatre conditions suivantes :

$$\frac{k}{m} = 5\,;20\,;100\,;500 \text{ s}^{-2}$$

Chaque « plot » sera tracé pour $0 \le t \le 10$ s.

<u>Note :</u> Pour tracer x et y, il suffit de noter que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

ANNEXE: Méthode d'Euler, rappels

Il s'agit d'une procédure simple qui permet de déterminer de façon numérique la trajectoire d'un point matériel soumis à la somme des forces $\vec{F}$ **connue**. L'équation différentielle qui gouverne le mouvement du point matériel est la seconde loi de Newton $\vec{a} = \vec{F}/m$ qui est du second ordre. Notre objectif est de déterminer $x(t)$ et $y(t)$, c'est-à-dire la trajectoire à partir de la connaissance de la loi de force, c'est-à-dire $F_x(x,y,v_x,v_y,t)$ et $F_y(x,y,v_x,v_y,t)$ (nous n'étudions que des trajectoires planes à deux dimensions).

La structure du programme sera la suivante :

1) déclaration des variables réelles :

$>(x,y)$ coordonnées de la position

$>(v_x,v_y)$ coordonnées de la vitesse

$>t$ le paramètre temps

$>h$ l'incrément de temps

$>(x_0,y_0)$ coordonnées de la position initiale

$>(v_{x0},v_{y0})$ coordonnées de la vitesse initiale

2) Ecriture des coordonnées de l'accélération en tant que fonction :

$$>a_x(x,y,v_x,v_y,t)=\frac{F_x(x,y,v_x,v_y,t)}{m}$$

$$>a_y(x,y,v_x,v_y,t)=\frac{F_y(x,y,v_x,v_y,t)}{m}$$

3) Entrée par l'utilisateur :

$h, x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}$

Affectations :

$>x:=x_0$

$>y:=y_0$

$>v_x:=v_{x0}$

$>v_y:=v_{y0}$

4) Incrémentation :

$>v_x:=v_x+a_x*h$

$>v_y:=v_y+a_y*h$

$>x:=x+v_x*h$

$>y:=y+v_y*h$

$>t:=t+h$

N Boucles

Fin

A la fin on récupère les résultats sont formes de tableaux :

$$v_x\begin{pmatrix}v_{x1}(t_1)\\v_{x2}(t_2)\\\dots\\v_{xN}(t_N)\end{pmatrix}\quad v_y\begin{pmatrix}v_{y1}(t_1)\\v_{y2}(t_2)\\\dots\\v_{yN}(t_N)\end{pmatrix}\quad x\begin{pmatrix}x_1(t_1)\\x_2(t_2)\\\dots\\x_N(t_N)\end{pmatrix}\quad y_x\begin{pmatrix}y_1(t_1)\\y_2(t_2)\\\dots\\y_N(t_N)\end{pmatrix}$$

La dernière ligne de l'incrémentation montre que le pas h s'identifie à un incrément temporel Δt. La première ligne incrémente la vitesse :

$$\Delta v_x=v_x(t+\Delta t)-v_x(t)=a_x(t)\Delta t\ ,$$

et la seconde la position :

$$\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)=v_x(t)\Delta t\,.$$

Il en est de même suivant y Pour h « suffisamment petit », l'algorithme précédent est un schéma des relations

$$a_x(t)=\frac{dv_x(t)}{dt}\underset{\Delta t\to 0}{=}\frac{v_x(t+\Delta t)-v_x(t)}{\Delta t}\ \text{ et } v_x(t)=\frac{dx(t)}{dt}\underset{\Delta t\to 0}{=}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

dont il réalise l'intégration.

Remarque: $-\frac{\vec{r}}{r^3}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\vec{i}-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\vec{j}$