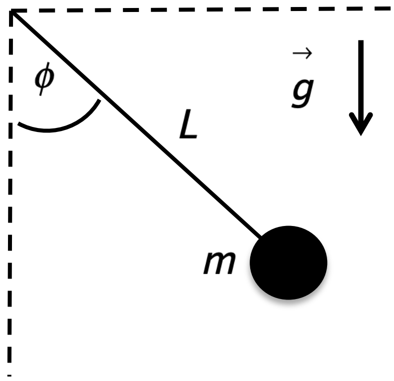
Un pendule « pas si simple »: Que se passe-t-il quand "$\sin\phi = \sin\phi$" ? La route vers le chaos !

<u>Note:</u> Les questions des exercices ne constituent que la trame principale de ce que vous devez faire pour vous guider, rien n'interdit bien sûr que vous alliez plus loin, que vous testiez d'autres choses, bref que vous expérimentiez…

Citation de Henri Poincaré* sur le chaos :

«Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit».

1) LE SYSTEME PHYSIQUE : MISE EN EQUATION



On considère un pendule simple de longueur L (cf. figure ci-contre) qui oscille dans un plan vertical. Il est soumis, en plus des forces usuelles (poids, tension du fil), à :

- Une force de frottement fluide de la forme $-b\vec{v}$.
- Une force d'excitation périodique de pulsation $\omega = 2\pi/T$ et de la forme $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, colinéaire au vecteur vitesse.

Nous avons montré en TD que l'équation différentielle qui gouverne l'évolution de $\phi(t)$ s'écrit

$$\ddot{\phi}(t) + \frac{b}{m}\dot{\phi}(t) + \frac{g}{L}\sin\phi(t) = \frac{F_0}{mL}\cos(\omega t).$$

Nous ne savons pas résoudre analytiquement cette équation différentielle dans le cas général à cause du terme non linéaire $\sin\phi$. Par contre, nous savons que si l'angle ϕ reste petit, donc F_0 par trop importante, alors $\sin\phi \approx \phi$ et nous connaissons (je l'espère à présent…) la solution analytique $\phi(t)$. En régime permanent, le pendule va osciller à la période imposée par la force d'excitation avec une amplitude et une phase qui dépendent de cette période. Nous écrirons comme d'habitude $2\beta = b/m$ et $\omega_0^2 = g/L$. Nous ferons apparaître le paramètre sans dimension $\alpha = F_0/mL\omega_0^2 = F_0/mg$ qui caractérise le rapport de l'amplitude de la force d'excitation et du poids et qui va jouer un rôle central dans la suite.

Henri Poincaré était un mathématicien, physicien et philosophe français né le 29 avril 1854 à Nancy et mort le 17 juillet 1912 à Paris. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos ; il est aussi un précurseur majeur de la théorie de la relativité restreinte. On le considère comme un des derniers grands savants universels, maîtrisant en particulier l'ensemble des branches des mathématiques de son époque (Source Wikipédia).

L'équation différentielle s'écrit à présent en fonction de ces derniers paramètres :

$$(1)\quad \ddot{\phi}(t)+2\beta\dot{\phi}(t)+\omega_0^2\sin\phi(t)=\alpha\,\omega_0^2\cos(\omega t)$$

Ce sont donc les solutions de cette équation qui vont nous intéresser. Il est commode pour notre étude de réécrire cette équation différentielle du second ordre sous la forme d'un système de 3 équations différentielles autonomes du premier ordre :

$$(2)\quad \begin{cases} d\phi_1(t)/dt=\phi_2(t) \\ d\phi_2(t)/dt=-2\beta\phi_2(t)-\omega_0^2\sin\phi_1(t)+\alpha\,\omega_0^2\cos\left(\frac{2\pi}{T}\phi_3(t)\right) \\ d\phi_3(t)/dt=1 \end{cases}$$

ϕ_1 est l'angle que fait le pendule avec la verticale, ϕ_2 la vitesse angulaire et ϕ_3 le temps. Sous cette forme, on constate que notre système physique à trois degré de liberté, condition nécessaire pour engendrer le chaos.

2) RESOLUTION NUMERIQUE : METHODE D'EULER

Pour résoudre ce système nous devons connaître les trois conditions initiales suivantes :

$$\phi_1(0),\ \phi_2(0)\ \text{et}\ \phi_3(0)$$

Nous souhaitons calculer la solution pour $t=0$ à $t=\tau$ avec $\tau>0$. Soit $n\geq 1$ un entier, on définit l'intervalle (le pas de calcul) par : $\Delta t\equiv\tau/n$

On note $(\phi_{1k},\phi_{2k},\phi_{3k})$ les solutions approchées correspondant aux solutions exactes $(\phi_1(t_k),\phi_2(t_k),\phi_3(t_k))$ pour $k=0,\ 1,\ \ldots\ n$. La méthode d'Euler qui consiste à remplacer la dérivée par un taux d'accroissement fini donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\phi_{3,k+1}-\phi_{3,k}}{\Delta t}=1 \\ \dfrac{\phi_{2,k+1}-\phi_{2,k}}{\Delta t}=-2\beta\phi_{2,k}-\omega_0^2\sin\phi_{1,k}+\alpha\,\omega_0^2\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\phi_{3,k}\right) \\ \dfrac{\phi_{1,k+1}-\phi_{1,k}}{\Delta t}=\phi_{2,k} \end{cases}$$

On peut réécrire les équations ci-dessus de façon plus commode pour l'écriture du code :

<u>Méthode d'Euler</u>

$$\phi_{3,k+1}=\Delta t+\phi_{3,k}$$

$$\phi_{2,k+1}=\phi_{2,k}+\Delta t\times\left[-2\beta\phi_{2,k}-\omega_0^2\sin\phi_{1,k}+\alpha\,\omega_0^2\cos\left(\frac{2\pi}{T}\phi_{3,k}\right)\right]$$

$$\phi_{1,k+1}=\phi_{1,k}+\Delta t\times\phi_{2,k}$$

3) VALEUR DES PARAMETRES PHYSIQUES

Nous prendrons :
→ $\omega = 2\pi$. Cela signifie que l'axe des temps sera gradué en période de la force d'excitation soit $T = 1$.
→ $\omega_0 = 1{,}5\omega$. La pulsation d'excitation est proche de celle de la résonance.
→ $\beta = \omega_0/4$.

Notre objectif est de **faire varier la valeur du paramètre** α (soit l'amplitude F_0 de la force d'excitation) et ainsi observer la richesse de la dynamique du pendule.

⚠ **Pour Python, l'unité d'une grandeur physique n'a pas de signification, seules comptent les valeurs numériques.**

4) RESOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME AVEC PYTHON

⌨ Votre travail consiste à taper un script nommé par exemple `pendule-force.py` qui permette de déterminer pour chaque instant $(\phi_{1k},\phi_{2k},\phi_{3k})$.

Pour cela votre code devra contenir une fonction `pendule (n, T, betha, omega0, alpha, phi10, phi20, phi30)` qui contient les paramètres d'entrée (n, T, β, ω_0, α, ϕ_{10}, ϕ_{20}, ϕ_{30}) et qui retourne les variables de type `array` de dimension n : `phi1`, `phi2` et `phi3` correspondant respectivement à ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3.

Pour l'instant, on peut prendre $\alpha = 0{,}2$ par exemple. on pourra récupérer 10000 valeurs sur un intervalle de temps de $\tau = 30T$ environ (à évaluer suivant la précision, le temps de calcul l'étude physique demandée).

⌨ Résoudre avec votre fonction `pendule` le système d'équation avec, par exemple, les conditions initiales $\{\phi_1(0) = -\pi/2; \phi_2(0) = 0\}$.

⌨ Tracer sur plusieurs dizaines de période $\phi_1(t)$ en fonction du temps.

⌨ Tracer ϕ_2 en fonction de ϕ_1, le « portrait de phase ».

⚠ **Pour utiliser les `array` et la fonction plot sous Python, il faut penser à importer la bibliothèque `numpy` et `matplotlib.pyplot` (voir le TD 4 d'informatique).**

5) MISE EN ŒUVRE ET ETUDE PHYSIQUE

⌨ $\boxed{\text{On prend } \alpha = 0{,}2}$

– Tracer, pour les conditions initiales $\{\phi_1(0) = 0; \phi_2(0) = 0\}$, $\phi_1(t)$ et le portrait de phase. Prendre un nombre de période suffisant pour que le système ait le temps d'atteindre le régime permanent. Analyser les résultats.
– Comparer le cas précédent avec le nouveau cas caractérisé par les conditions initiales $\{\phi_1(0) = -\pi/2; \phi_2(0) = 0\}$. On tracera sur les mêmes graphes les courbes similaires (les $\phi_1(t)$ et les portraits de phase). Analyser les résultats.

On prend les conditions initiales suivantes $\left\{\phi_1(0) = -\pi / 2; \phi_2(0) = 0\right\}$.

Tracer $\phi_1(t)$ et le portrait de phase correspondant pour :

$$\boxed{\alpha = 1{,}06;\, 1{,}078;\, 1{,}081;\, 1{,}0826;\, 1{,}105}.$$

Suivant les valeurs de α, le système atteint-il un régime permanent période ? Si oui, de quelle période (par rapport à celle de l'excitation) ? Si non, que se passe-t-il ?

$\boxed{\text{On prend } \alpha = 1{,}077}$

Comparer le comportement du pendule avec les conditions initiales $\left\{\phi_1(0) = 0; \phi_2(0) = 0\right\}$ et celui avec les conditions initiales $\left\{\phi_1(0) = -\pi/2; \phi_2(0) = 0\right\}$. Que peut-on en conclure ? Comparer avec le cas $\alpha = 0{,}2$.

$\boxed{\text{On prend } \alpha = 1{,}503}$

Comparer le comportement du pendule avec les conditions initiales $\left\{\phi_1(0) = 0; \phi_2(0) = 0\right\}$ et celui avec les conditions initiales $\left\{\phi_1(0) = 0{,}001; \phi_2(0) = 0\right\}$. Que peut-on en conclure ? Comparer avec le cas $\alpha = 0{,}2$.

Référence pour en savoir plus: Classical Mechanics par John R. Taylor aux éditions University Sciences Books, 2005, 786 p. En particulier le chapitre 12 que j'ai utilisé pour ce TD « Nonlinear mechanics and chaos ».