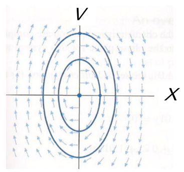
On considère un système physique décrit par le paramètre $x(t)$ qui oscille faiblement autour d'une position d'équilibre stable comme: un pendule simple dans la limite des petits angles, une masse attachée à un ressort dans la limite des petites amplitudes, la charge d'un condensateur dans un circuit RLC dans la limite des faibles courantes et des faibles tensions.

1 - Oscillations harmoniques: pas de termes dissipatifs, conservation de l'énergie

Modélisation, lois physiques

Equation différentielle:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$



ω_0 = pulsation propre, caractéristique physique du système $(\omega_0 > 0)$

Exemples importants

- $\to$ pendule simple: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$
- $\to$ masse-ressort: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- $\to$ circuit LC: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Résolution mathématiques

Solution: $x(t) = \boxed{A}\cos(\omega_0 t + \boxed{\varphi})$

$\boxed{}$ à déterminer avec les conditions initiales

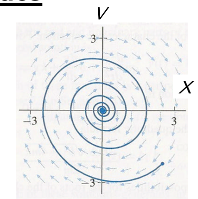
$$x(0) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0) = v_0$$

2 - Oscillations amorties: présence d'un terme dissipatif, perte d'énergie

Modélisation, lois physiques

Equation différentielle:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}}_{\text{terme dissipatif}} + \omega_0^2 x = 0$$



Exemples importants

- $\to$ pendule simple: $Q = \frac{m}{h}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$
- $\to$ masse-ressort: $Q = \frac{m}{h}\sqrt{\frac{k}{m}}$
- $\to$ circuit RLC: $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Q = facteur de qualité du circuit, sans unité $(Q > 0)$

Résolution mathématiques

- Si $\Delta > 0$ soit $0 < Q < 1/2$: régime apériodique
  $x_{tr}(t) = e^{-\beta t}\left(\boxed{B}\, e^{-\Omega t} + \boxed{C}\, e^{\Omega t}\right)$
  avec $2\beta = \omega_0/Q$ et $\Omega^2 = \beta^2 - \omega_0^2$
  $\Omega > 0$ car β grand

- Si $\Delta = 0$ soit $Q = 1/2$: régime critique $\beta = \omega_0$
  (retour le plus rapide à l'équilibre)
  $x_{tr}(t) = \left(\boxed{D} + \boxed{E}\, t\right)e^{-\beta t}$

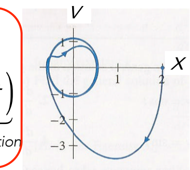
- Si $\Delta < 0$ soit $Q > 1/2$: régime pseudopériodique
  $x(t) = \boxed{A}\, e^{-\beta t}\cos(\Omega t + \boxed{\varphi})$
  $= e^{-\beta t}\left(\boxed{F}\cos\Omega t + \boxed{G}\sin\Omega t\right)$
  avec $2\beta = (\omega_0/Q) > 0$ et $\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ (pseudo-pulsation)
  $\Omega > 0$ car β faible, $\Omega \le \omega_0$
  $T(\text{pseudo-période}) \equiv \frac{2\pi}{\Omega} = T_0 \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$ et $T \ge T_0$

3 - Oscillations forcées: présence d'un terme d'excitation, compense les pertes d'énergie

Modélisation, lois physiques

Equation différentielle:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}}_{\text{Terme dissipatif}} + \omega_0^2 x = \underbrace{a\cos(\omega t)}_{\text{Terme d'excitation}}$$



ω = pulsation de la source d'énergie extérieure (l'excitation)

Résolution mathématiques

$$x(t) = \underbrace{x_g(t)}_{\substack{\text{solution générale}\\ \text{sans second membre}\\ \text{(équation homogène)}\\ = \text{réponse naturelle}}} + \underbrace{x_p(t)}_{\substack{\text{solution particulière}\\ \text{avec second membre}\\ \text{(équation non homogène)}\\ = \text{réponse forcée}}}$$

$\left\{\begin{array}{l} x_g(t) \text{ idem cas précédent} \\ \text{suivant les valeurs de } Q \end{array}\right\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$x_{per}(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ (ne dépend pas des conditions initiales)

- $X_m(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ (fonction de ω) sont à déterminer en utilisant les amplitudes complexes:
  $x_{per} = X_m\cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \underline{X} = X_m e^{j\varphi}$ etc...
- Phénomène de résonance possible suivant les valeurs de ω