BILAN : OSCILLATIONS LIBRES, EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Rémy Duperray PTSI Voiron

On considère un système physique décrit par le paramètre $x(t)$ qui oscille faiblement autour d'une position d'équilibre stable comme: un pendule simple dans la limite des petits angles, une masse attachée à un ressort dans la limite des petites amplitudes, la charge d'un condensateur dans un circuit LC dans la limite des faibles courants et des faibles tensions.

1 - Oscillation harmonique: pas de terme dissipatif, conservation de l'énergie

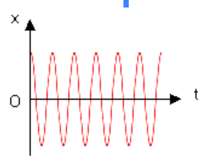
Modélisation, lois physiques

Equation différentielle: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

ω_0 = pulsation propre, caractéristique physique du système $(\omega_0 > 0)$

Exemples importants

- $\rightarrow$ pendule simple: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$
- $\rightarrow$ masse-ressort: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
- $\rightarrow$ circuit LC: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$



Pas de terme dissipatif, mouvement périodique

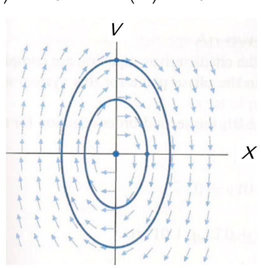
Résolution mathématique

Solution: $x(t) = \boxed{A}\cos(\omega_0 t + \boxed{\varphi})$

$\boxed{}$ à déterminer avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0) = v_0$$

Portrait de phase

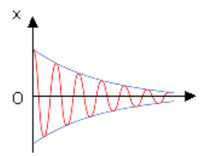


2 - Oscillation amortie: présence d'un terme dissipatif, perte d'énergie

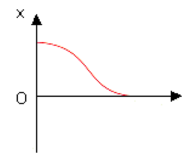
Modélisation, lois physiques

Equation différentielle: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dx}{dt}}_{\text{terme dissipatif}} + \omega_0^2 x = 0$

Q = facteur de qualité du circuit, sans unité $(Q > 0)$



Terme dissipatif « faible », mouvement pseudo-périodique

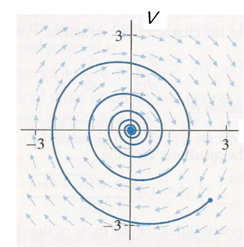


Terme dissipatif « important », mouvement apériodique

Exemples importants

- $\rightarrow$ pendule simple: $Q = \dfrac{m}{h}\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$
- $\rightarrow$ masse-ressort: $Q = \dfrac{m}{h}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$
- $\rightarrow$ circuit RLC: $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Portrait de phase (pseudo-périodique)



Résolution mathématique

- Si $\Delta > 0$ soit $0 < Q < 1/2$: régime apériodique

$x_{tr}(t) = e^{-\beta t}\left(\boxed{B}\, e^{-\Omega t} + \boxed{C}\, e^{\Omega t}\right)$ avec $2\beta = \omega_0/Q$ et $\Omega^2 = \beta^2 - \omega_0^2$, $\Omega > 0$ car β grand

- Si $\Delta = 0$ soit $Q = 1/2$: régime critique (retour le plus rapide à l'équilibre) $\beta = \omega_0$

$x_{tr}(t) = \left(\boxed{D} + \boxed{E}\, t\right)e^{-\beta t}$

- Si $\Delta < 0$ soit $Q > 1/2$: régime pseudopériodique

$x(t) = \boxed{A}\, e^{-\beta t}\cos(\Omega t + \boxed{\varphi}) = e^{-\beta t}\left(\boxed{F}\cos\Omega t + \boxed{G}\sin\Omega t\right)$ avec $2\beta = (\omega_0/Q) > 0$

$\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ (pseudo-pulsation) $\Omega > 0$ car β faible, $\Omega \leq \omega_0$

$$T(\text{pseudo-période}) \equiv \frac{2\pi}{\Omega} = T_0 \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \quad \text{et } T \geq T_0$$