LE POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

« Nothing is too wonderful to be true if it be consistent with the laws of nature. »
Michael Faraday (1791-1867)

Depuis le cours de mécanique, nous savons que la force de gravité est une force conservative, elle dérive d'une énergie potentielle. Le travail de la force de gravité, pour aller d'un point de l'espace à un autre, peut s'écrire comme l'opposé de la variation d'énergie potentielle entre ces deux mêmes points. Le travail d'une force conservative est indépendant du chemin suivi.

La force électrostatique est aussi une force conservative. Elle dérive d'une énergie potentielle. Le **potentiel électrostatique**, grandeur que l'on rencontre en permanence en électrocinétique, n'est rien d'autre que **l'énergie potentielle par unité de charge** associée à la force électrostatique.

Nous allons voir que le potentiel électrostatique (grandeur scalaire) et le champ électrostatique (grandeur vectorielle) sont liés mathématiquement et que la connaissance de l'un détermine la connaissance de l'autre.

I – Energie potentielle d'origine électrostatique

1.1 Rappel : travail d'une force conservative, énergie potentielle

On considère une force $\vec{F}$ qui agit sur une particule. Le travail de cette force lorsque la particule va d'un point a vers un point b s'écrit :

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}.\overrightarrow{d\ell}$$

où $\overrightarrow{d\ell}$ est le vecteur déplacement élémentaire le long de la trajectoire de la particule. La force est conservative si $W_{a\to b}$ peut s'écrire :

$$W_{a\to b} = -\left(U_b - U_a\right) = -\Delta U$$

U est l'énergie potentielle associée à la force $\vec{F}$, elle est fonction des coordonnées de l'espace[1]. D'après le théorème de l'énergie cinétique $W_{a\to b} = K_b - K_b$, le travail est égal à la variation d'énergie cinétique[2].

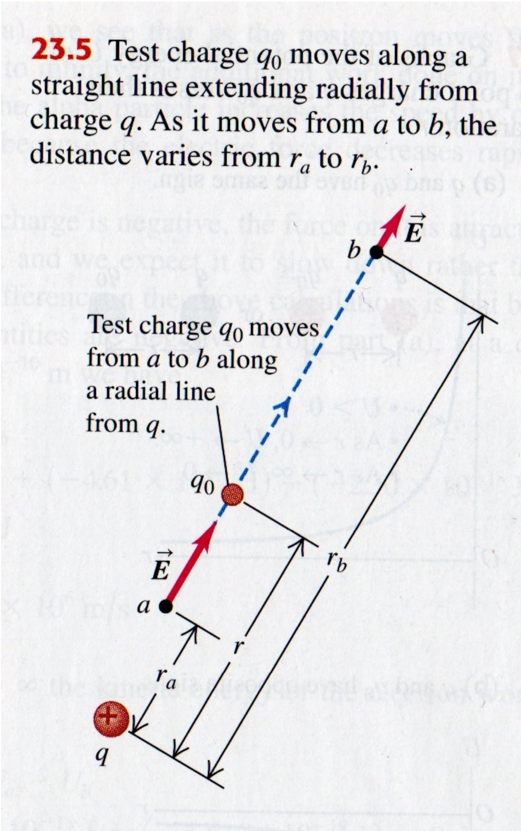
---

[1] Dans le cours de mécanique, on utilise la notation E_p pour l'énergie potentielle. Dans ce cours, on préfère la notation U pour ne pas confondre avec la notation E du champ électrostatique.

[2] On a utilisé la notation K pour l'énergie cinétique (de l'anglais kinetic) toujours pour ne pas confondre avec la notation E du champ électrostatique.

On aboutit, pour une force conservative, à la conservation de l'énergie mécanique entre le point a et le point b : $K_a + U_a = K_b + U_b$.

1.2 Energie potentielle d'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles



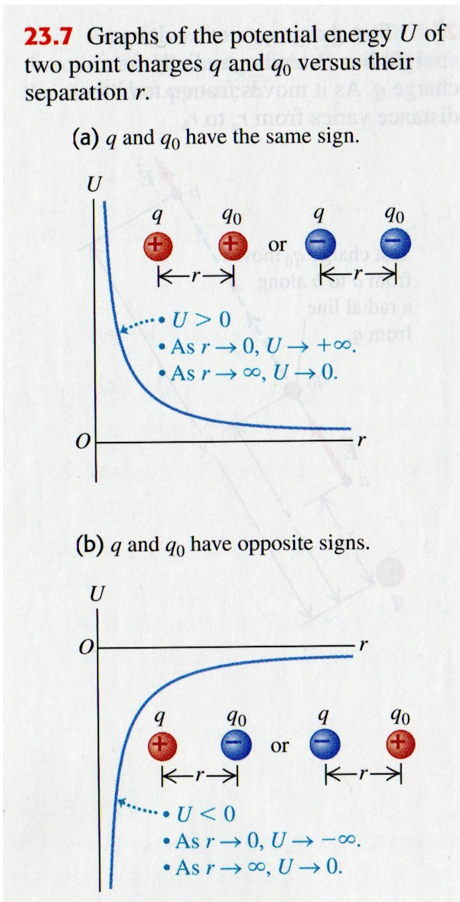
23.5 Test charge q_0 moves along a straight line extending radially from charge q. As it moves from a to b, the distance varies from r_a to r_b.

Une particule source de charge q produit un champ électrostatique $\vec{E}$ (figure 23.5). Une charge test, en présence de ce champ, subit la force $\vec{F} = q_0\vec{E}$. Calculons le travail de cette force, lorsque la charge test va de a vers b sur un chemin radial ($\overrightarrow{d\ell} = dr\,\overrightarrow{u_r}$):

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{d\ell} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}.dr\,\overrightarrow{u_r} =$$

$$\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}dr = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_b} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_a}\right)$$

- Si $q_0 > 0$, $W_{a\to b} > 0$, le travail est moteur. La force $\vec{F} = q_0\vec{E}$ déplace bien la particule test de a vers b.
- Si $q_0 < 0$, $W_{a\to b} < 0$, le travail est résistif. La force $\vec{F} = q_0\vec{E}$ s'oppose à ce que la particule test aille de a vers b.



23.7 Graphs of the potential energy U of two point charges q and q_0 versus their separation r.

On voit apparaître l'expression de **l'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre deux charges q et q_0** :

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r} \quad \text{avec } U = 0 \text{ quand } r \to \infty}$$

où r est la distance entre les deux charges. Cette expression est parfaitement symétrique et la distinction entre la particule test et la particule source n'a plus d'intérêt. L'énergie potentielle est définie à une **constante arbitraire près**. En général, on prend cette constante nulle, c'est-à-dire que $U = 0$ quand $r \to \infty$.

Nous avons obtenu ce résultat en prenant un chemin radial ce qui rend facile le calcul de l'intégrale. On peut montrer que le résultat obtenu **est vrai pour n'importe quel chemin allant du point a au point b.**

Il ne faut pas confondre l'expression précédente avec celle de la force électrostatique. L'énergie potentielle varie en $\frac{1}{r}$ alors que la loi de Coulomb varie en $\frac{1}{r^2}$. La figure 23.7 montre l'allure de la fonction énergie potentielle suivant le signe des charges.

$U > 0$ est positive lorsque l'énergie potentielle d'interaction entre les deux charges est **répulsive** et négative, $U < 0$, quand elle est **attractive**. Dans ce dernier cas, on retrouve la même allure que pour l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle entre deux masses qui est toujours attractive, $U = -G\frac{mm_0}{r} < 0$.

II – Définition et expression du potentiel électrostatique

2.1 Définition

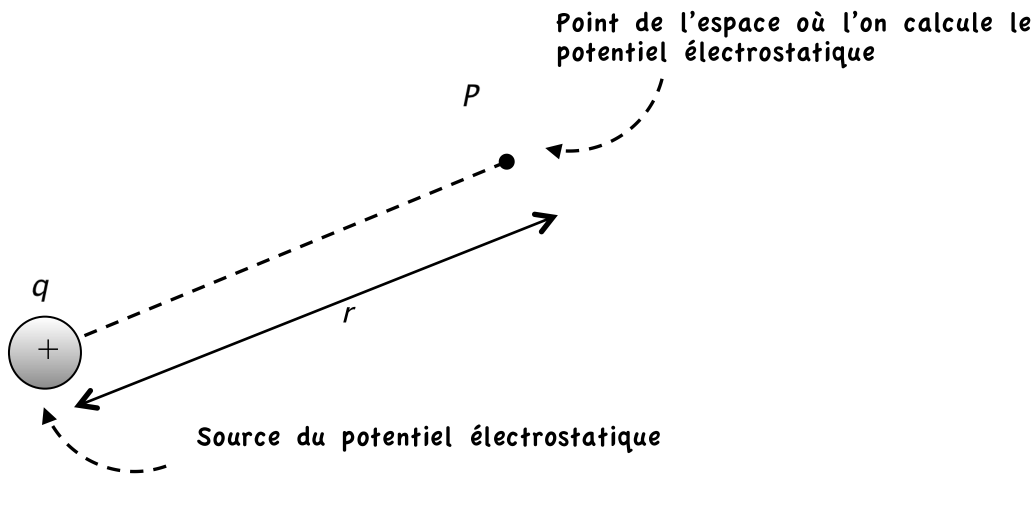
Le **potentiel électrique** correspond à **l'énergie potentielle par unité de charge** associée à la particule test q_0 **:**

$$\boxed{\text{Potentiel électrostatique: } V = \frac{U}{q_0}}$$

Le potentiel électrostatique correspond à une énergie divisée par une charge, il s'exprime donc en $J.C^{-1}$ que l'on appelle Volt dont le symbole[3] est V. On peut ainsi définir le travail par unité de charge par :

$$\frac{W_{a\to b}}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -\left(V_b - V_a\right) = -\Delta V$$

2.2 Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle



[3] Il est d'usage d'écrire le potentiel électrostatique et l'unité Volt avec la même lettre, attention à ne pas faire de confusions.

D'après l'expression de l'énergie potentielle entre deux charges, on obtient directement l'expression du potentiel électrostatique créé en un point P par une charge source:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \text{ avec } V = 0 \text{ quand } r \to \infty}$$

Une charge test placée au point P aura une énergie potentielle $U = q_0 V$ du fait de la présence de la charge source. Un potentiel électrostatique est toujours défini à une constante près. On prend souvent cette constante nulle à l'infini mais cela n'est pas le seul choix possible. Suivant le type de situation, on prend la constante qui permet de simplifier les calculs.

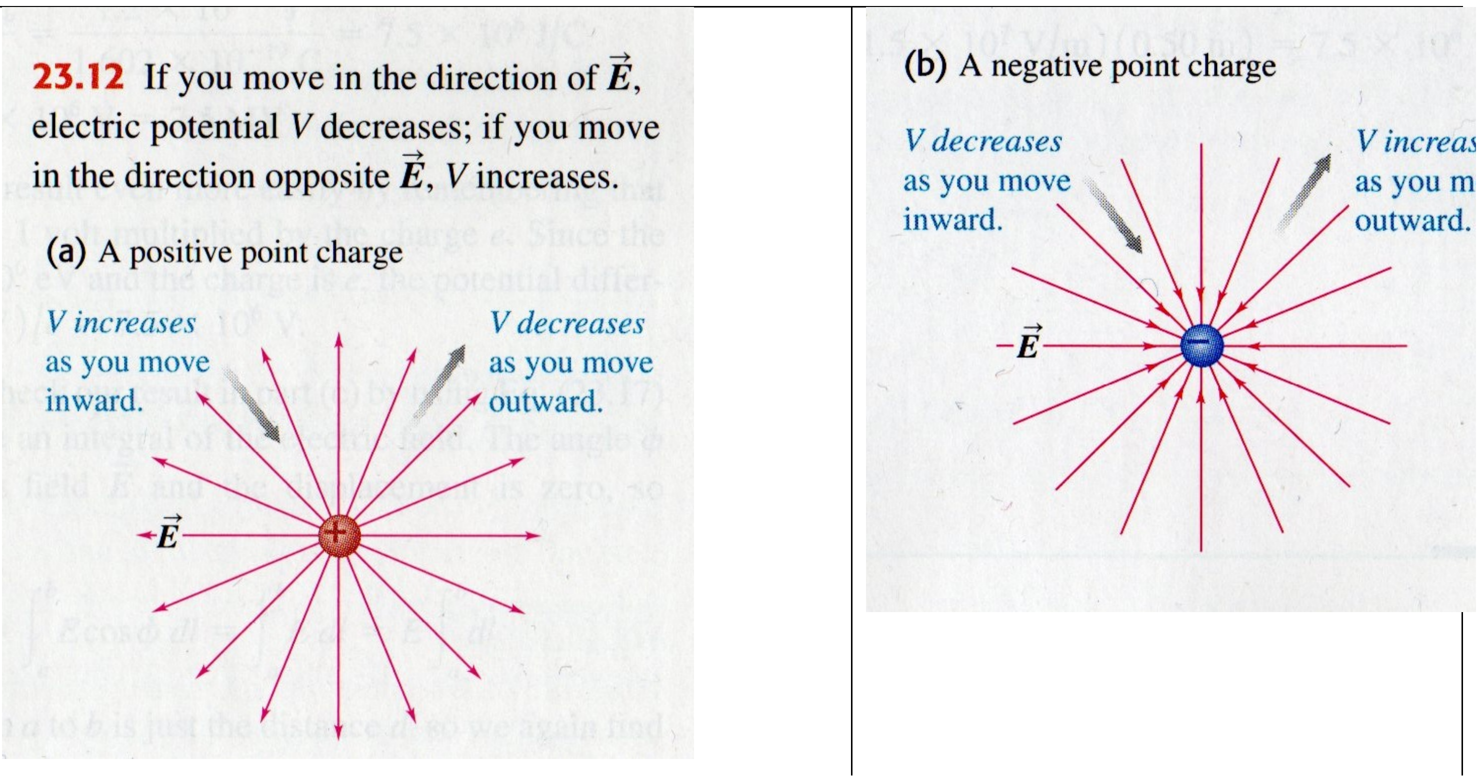
Si la charge source q se trouve au point de coordonnées (x_1, y_1, z_1), le potentiel électrostatique au point $P(x, y, z)$, dans un système de coordonnées cartésiennes, vaut :

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}}$$

Le potentiel électrostatique est un **champ scalaire**, c'est une fonction du point de l'espace. On constate de plus que le potentiel électrostatique d'une charge ponctuelle est à **symétrie sphérique**, il ne dépend que de r.

Suivant le signe de la charge, le potentiel décroît ou croît suivant que l'on s'éloigne ou que l'on se rapproche de la charge. Mais dans tous les cas, le potentiel décroît dans la direction du champ électrostatique et croît dans la direction opposée (nous allons en reparler). La figure ci-dessous résume les différentes situations.

23.12 If you move in the direction of $\vec{E}$, electric potential V decreases; if you move in the direction opposite $\vec{E}$, V increases.



En électrostatique, on peut décrire la situation en termes d'interaction entre particules avec la notion de force où d'énergie potentielle. On peut aussi décrire la situation en considérant qu'une charge (ou un groupe de charges) produit en chaque point de l'espace un champ électrostatique ou un potentiel électrostatique. Nous allons voir dans les paragraphes suivants le lien entre champ et potentiel.

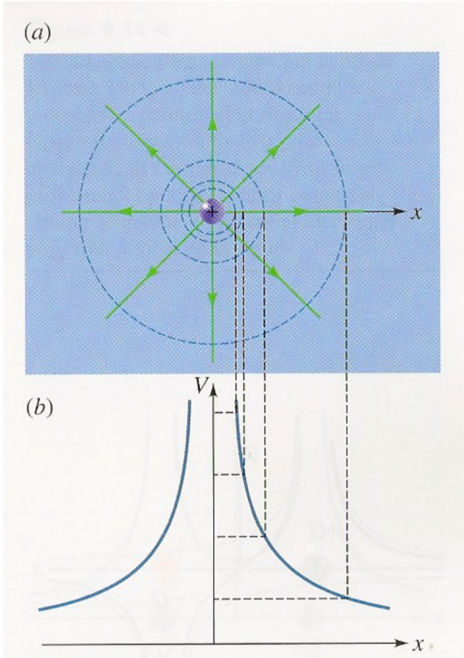


Figure 4.11 ▲
(*a*) La fonction potentiel $V = kQ/r$ pour une charge ponctuelle. Les cercles en pointillés représentent les surfaces équipotentielles (qui sont des sphères centrées sur la charge). (*b*) Graphique de V le long d'un axe x quelconque passant par la charge. L'origine de l'axe et la charge coïncident.

Le tableau ci-dessous résume la situation.

	Description vectorielle	Description scalaire
Interaction entre deux charges	force $\vec{F}$	énergie potentielle U
Effet d'une charge ou d'un groupe de charges, en un point de l'espace	Champ $\vec{E}$	potentiel V

2.3 Potentiel électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles : principe de superposition

On cherche à présent à déterminer le potentiel électrostatique en un point P de l'espace créé par ensemble de charges ponctuelles. **En utilisant le principe de superposition**, le potentiel électrique en P est la somme du potentiel électrostatique créé par chaque charge :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \text{ avec } V = 0 \text{ quand } r_i \to \infty}$$

où r_i est la distance entre la charge q_i et le point P.

2.4 Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges

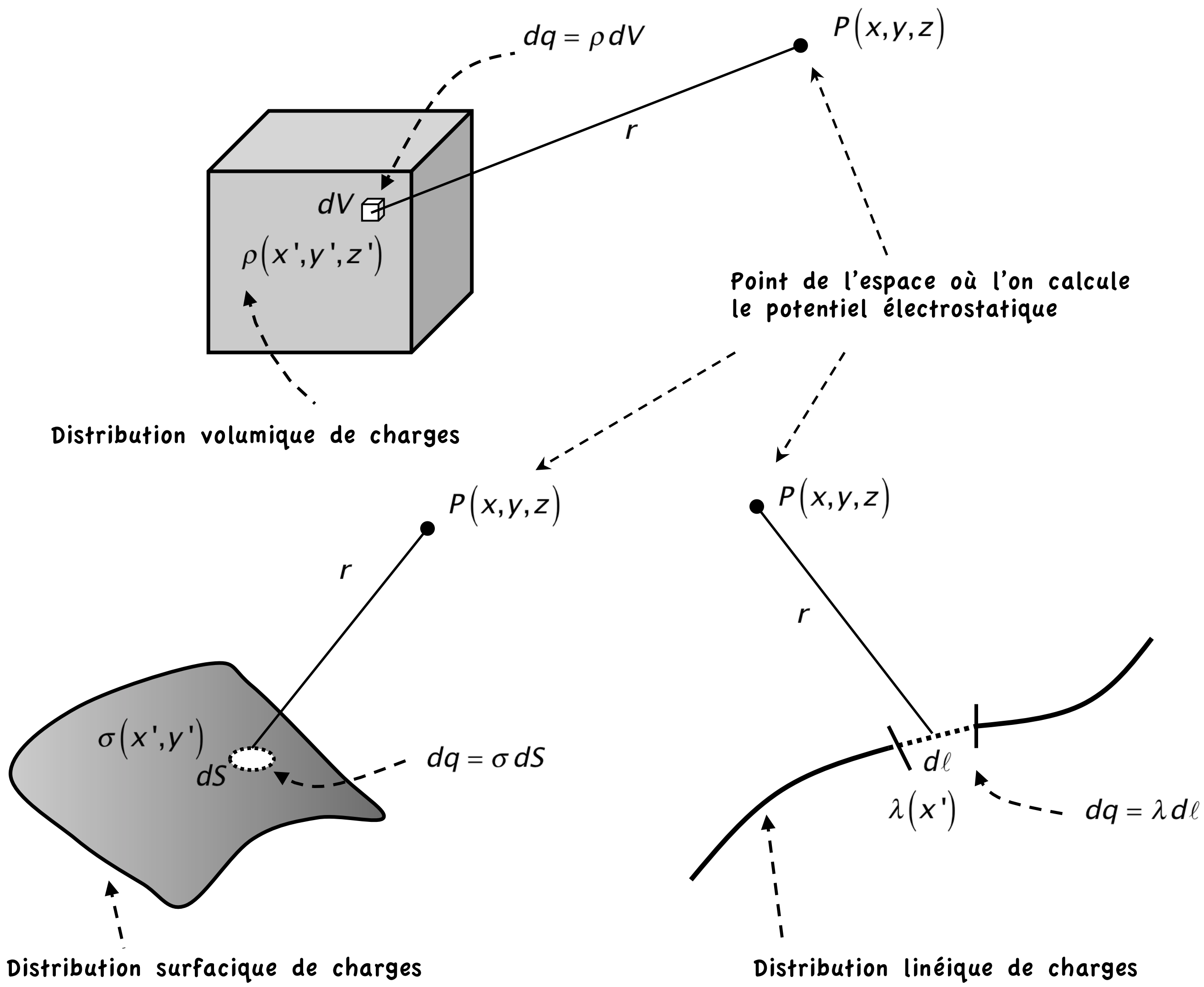
Pour une distribution de charges continue, il faut suivre la même procédure que pour le champ électrostatique. Pour déterminer le potentiel électrostatique en un point, il faut sommer le potentiel créé par toutes les contributions élémentaires (les charges élémentaires), c'est-à-dire intégrer sur l'ensemble de la distribution de charges. Suivant la modélisation considérée, distribution volumique de charge, surfacique ou linéique (voir figure ci-contre), le potentiel électrostatique en un point de l'espace s'écrit :

$$V(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\substack{\text{distribution}\\ \text{de charge}}}\frac{\rho(x',y',z')}{r}dV \Rightarrow \text{distribution volumique de charge}$$

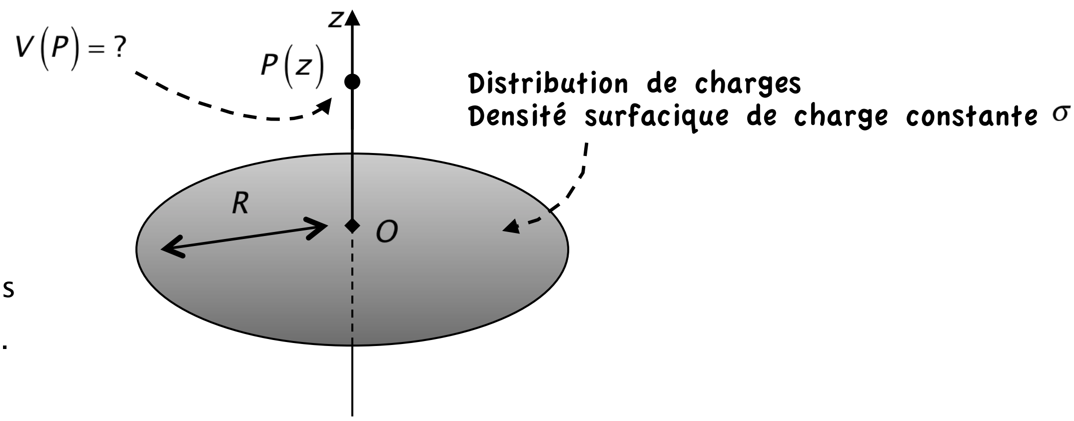
$$V(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\substack{\text{distribution}\\ \text{de charge}}}\frac{\sigma(x',y',z')}{r}dS \Rightarrow \text{distribution surfacique de charge}$$

$$V(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\substack{\text{distribution}\\ \text{de charge}}}\frac{\lambda(x',y',z')}{r}d\ell \Rightarrow \text{distribution linéique de charge}$$

Il faut bien noter que le potentiel est en $1/r$ et non pas en $1/r^2$ comme pour le champ. De plus le potentiel est une fonction scalaire et non une fonction vectorielle comme le champ. Dans les trois expressions précédentes, le potentiel est pris nul à l'infini. Cela n'est plus possible dans le cas d'une distribution de charges infinie (il s'agit d'un modèle). Il faudra prendre comme constante une valeur du potentiel (pas nécessairement nulle) en un point de l'espace autre que l'infini.



2.5 Exemple : potentiel électrostatique sur l'axe d'un disque uniformément chargé, continuité du potentiel



Méthodes et calculs présentés au tableau.

III – Lien entre potentiel et champ électrostatique

3.1 Relation globale : circulation du champ électrostatique

On considère de nouveau une charge test q_0 en présence du champ électrostatique $\vec{E}$. Elle subit la force $\vec{F} = q_0\vec{E}$. Le travail de cette force, lorsque la charge test va de a vers b vaut :

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}.\overrightarrow{d\ell} = \int_a^b q_0\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -\left(U_b - U_a\right),$$

la force électrostatique étant conservative. En divisant chaque membre de cette égalité par la charge q_0, on obtient la relation importante suivante :

$$\boxed{\int_a^b \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -\left(V_b - V_a\right)}$$

On constate que le champ et le potentiel sont étroitement liés. Grâce à cette relation, on constate que le champ électrostatique s'exprime aussi en $\mathrm{V.m^{-1}}$.

L'intégrale curviligne $\int_a^b \vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$ est appelée **circulation du champ électrostatique** entre deux points. On peut donc dire que la circulation du champ électrostatique entre deux points correspond à l'opposée de la variation de potentiel entre ces deux points. La circulation du champ est indépendante du chemin suivi, elle ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée. Ainsi pour un chemin fermé, la circulation du champ est nulle :

$$\boxed{\oint \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = 0}$$

On dit que dans ce cas **le champ électrostatique est à circulation nulle**. Vous verrez en PT que, pour des champs variables dans le temps, cette relation n'est plus valable.

La relation $\int_a^b \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -\left(V_b - V_a\right)$, qui nécessite une intégration sur un certain domaine spatial, est une relation dite **globale** par opposition à la relation locale (physiquement équivalente) que nous allons voir dans le paragraphe qui suit.

3.2 Relation locale : gradient du champ électrostatique

On repart de $\int_a^b \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -\left(V_b - V_a\right)$. On peut écrire que $V_b - V_a = \int_a^b dV$ donc :

$$\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -dV$$

$\vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$ est la circulation du champ pour deux points infiniment proches.

En coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{d\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ donc $\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,d_z$. De plus, on a vu dans le cours de thermodynamique que pour toute fonction $V = V(x,y,z)$, la variation élémentaire dV de cette fonction s'écrit mathématiquement :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Ainsi par identification, on obtient les composantes du champ électrostatique en fonction des dérivées partielles du potentiel électrostatique :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Il est commode d'introduire l'opérateur vectoriel **gradient** (déjà rencontré dans le cours de mécanique), noté $\vec{\nabla}$, dont les composantes s'écrivent en coordonnée cartésiennes $\vec{\nabla} : \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

On peut réécrire la relation précédente sous la forme compacte suivante :

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

En chaque point de l'espace, le gradient du potentiel $\vec{\nabla} V$ indique la direction dans laquelle V croît le plus rapidement. Ainsi en chaque point de l'espace, $\vec{E}$ **est dirigé dans la direction de la plus forte décroissance du potentiel** (à cause du signe $-$ à ne pas oublier). En d'autres termes, le champ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

La connaissance du potentiel permet d'accéder à la connaissance du champ et inversement. En général, il est plus simple de déterminer le potentiel qui est une fonction scalaire et ensuite, par intégration, de calculer les composantes du champ. C'est ce que nous avons réalisé en TD d'informatique avec Maple.

La relation $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ est vraie en chaque point de l'espace, on dit qu'il s'agit d'une **relation locale**. Si on multiplie cette relation à droite et à gauche par q_0, on obtient $q_0\vec{E} = -\vec{\nabla} q_0 V$, c'est-à-dire $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$. On retrouve la relation, rencontrée dans le cours de mécanique, entre une force conservative et l'énergie potentielle dont elle dérive.

3.3 Utilisation : calcul du champ à partir du potentiel

La relation $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ permet de déterminer le champ électrostatique à partir de la connaissance du potentiel électrostatique. En effet, il est souvent plus simple de calculer d'abord le potentiel, qui est une fonction scalaire, puis, par dérivation, le champ.

Reprenons l'exemple du disque uniformément chargé. Le potentiel en un point de l'axe du disque vaut pour $z > 0$:

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right)$$

On peut ainsi déterminer le champ par dérivation :

$$E_x = -\frac{\partial V(z)}{\partial x} = 0 \quad E_y = -\frac{\partial V(z)}{\partial y} = 0$$

$$E_z = -\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\left(z^2 + R^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2z - 1\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

On retrouve le résultat que l'on a obtenu par un calcul direct du champ.

3.4 Topographie du potentiel électrostatique

Une **surface équipotentielle** est constituée de l'ensemble des points de l'espace qui possèdent le même potentiel électrostatique. Nous avons déjà étudié et tracé des surfaces équipotentielles en TD d'informatique avec Maple. Par exemple, dans le cas d'une charge ponctuelle, les équipotentielles sont constituées par l'ensemble des sphères centrées sur cette charge puisque $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ (avec $V = 0$ quand $r \to \infty$).

Une charge test q_0 qui se déplace sur une surface équipotentielle possède toujours la même énergie potentielle $q_0 V$. Deux surfaces équipotentielles ne peuvent donc se couper sinon la particule test possèderait en un même point de l'espace deux énergies potentielles différentes.

Au cours du déplacement de la charge test q_0 entre deux points a et b appartenant à une même surface équipotentielle, le travail du champ électrique est nul ($W_{a\to b} = -\left(U_b - U_a\right) = 0$ car $U_b = U_a$). Par conséquent, $\vec{E}.\vec{d\ell} = 0$ si qui se traduit de la façon suivante:

> Le champ électrostatique est orthogonal en tout point d'une surface équipotentielle. Ainsi les lignes de champ et les surfaces équipotentielles sont toujours orthogonales.
> `

La figure ci-dessous illustre ce propos.

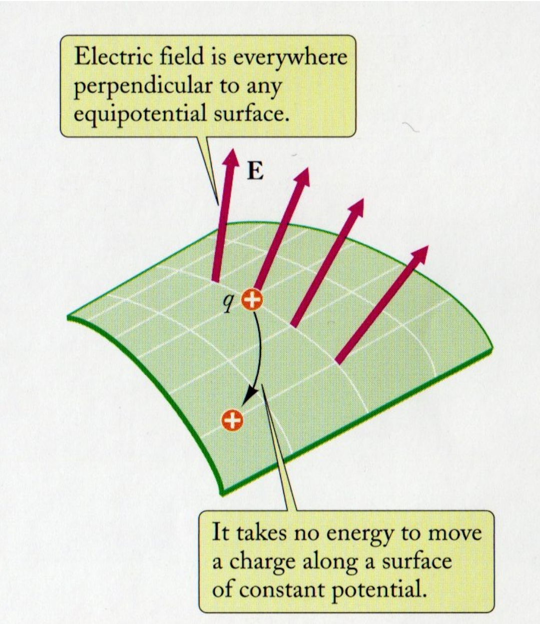


FIGURE 25.26 The electric field is everywhere perpendicular to the equipotential surface. If a charge q moves along this surface, the electric field does no work on it.

Les figures ci-dessous (qui ne sont que des coupes en 2D) montrent des exemples de surfaces équipotentielles et de lignes de champ pour différentes distributions de charges.

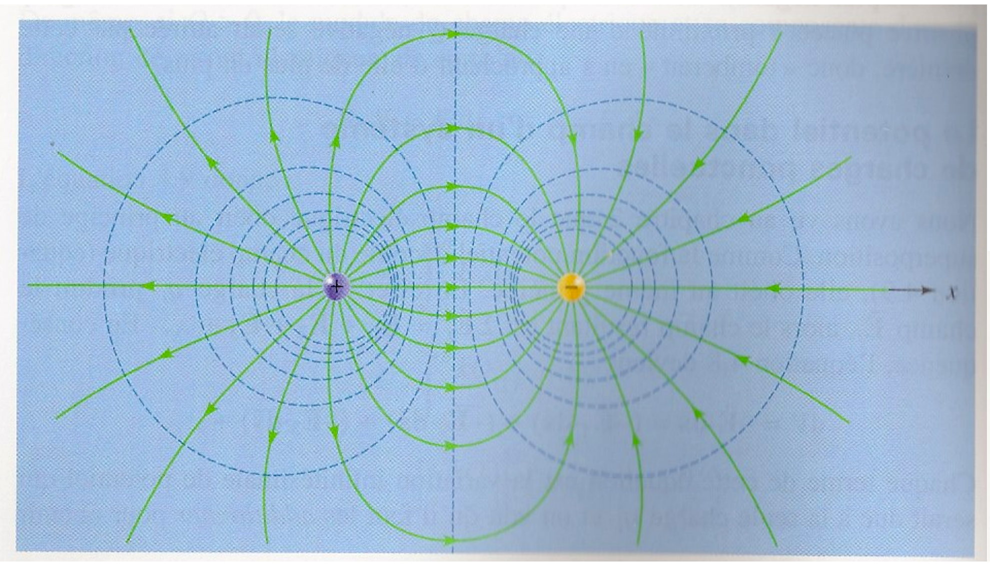


Figure 4.13 ►
Vue en coupe (dans le plan qui contient les deux charges) des équipotentielles (courbes en pointillés) et des lignes de champ (courbes continues) pour deux charges de même grandeur et de signes opposés. (Voir le problème 21 pour découvrir comment obtenir le graphe du potentiel électrique pour tout le plan de la figure.)

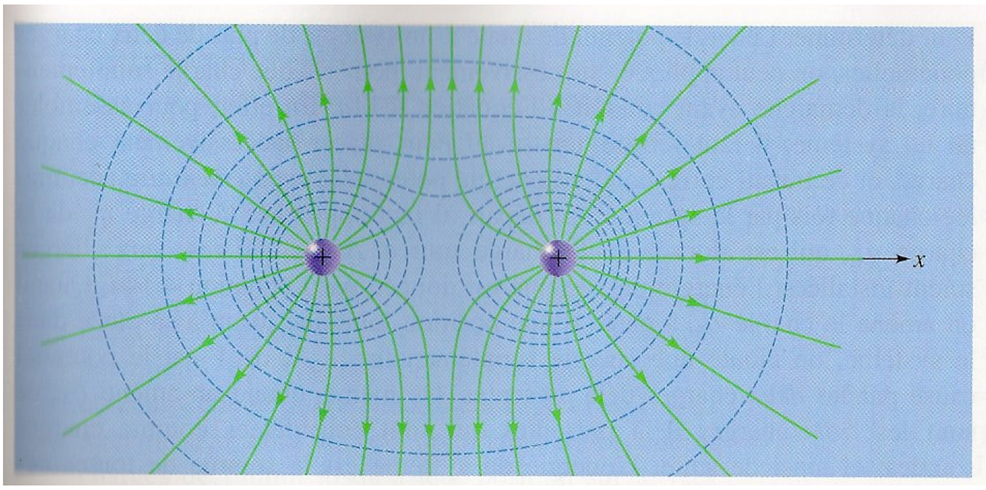


Figure 4.14 ◄
Vue en coupe (dans le plan qui contient les deux charges) des équipotentielles (courbes en pointillés) et des lignes de champ (courbes continues) pour deux charges égales et positives. (Voir le problème 22 pour découvrir comment obtenir le graphe du potentiel électrique pour tout le plan de la figure.)

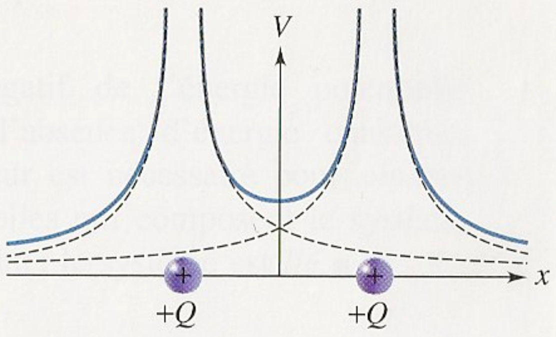


Figure 4.15 ▲
Les deux courbes en traits pointillés représentent les potentiels individuels produits par deux charges égales et positives. Les courbes continues correspondent au potentiel total.

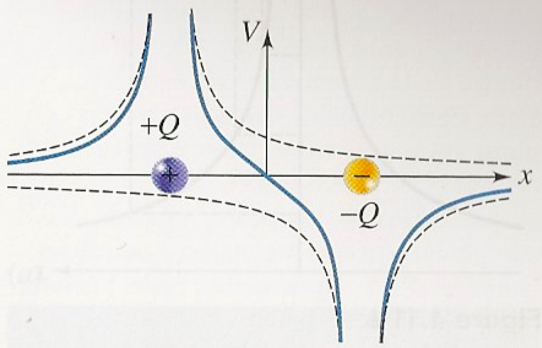


Figure 4.12 ▲
Les courbes en pointillés sont les potentiels individuels produits par deux charges de même grandeur et de signes opposés. Les courbes continues correspondent au potentiel total.

IV – Modélisation du condensateur plan

FIGURE 27.21 The electric fields inside and outside a parallel-plate capacitor.

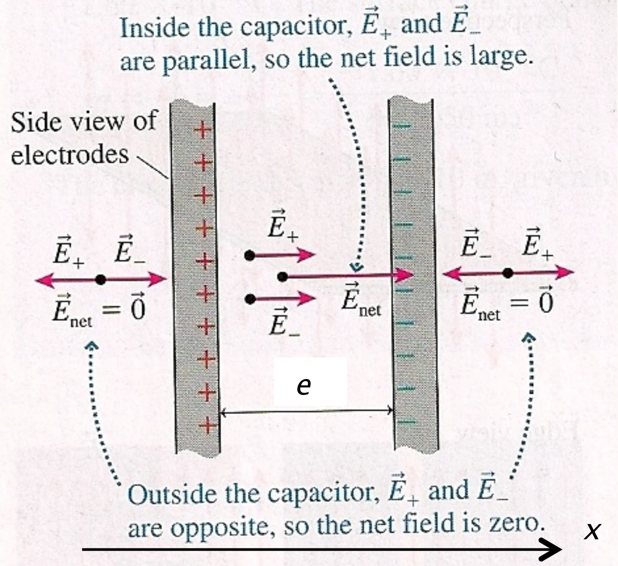
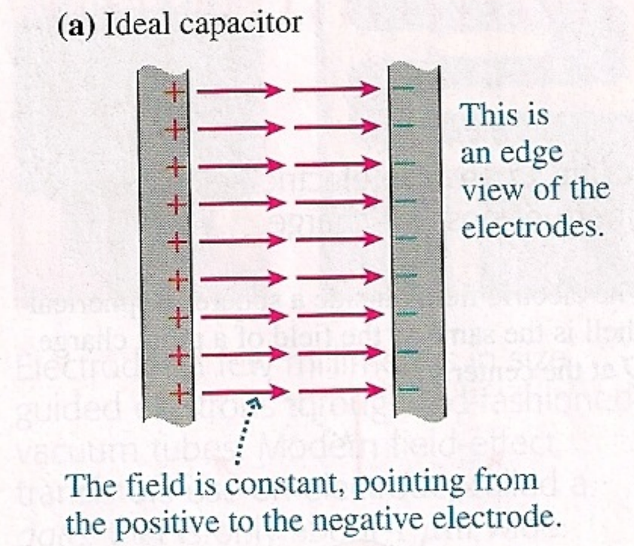


FIGURE 27.22 The electric field of a capacitor.



Un **condensateur plan** est constitué de deux plaques parallèles de surface A séparées par une distance $e \ll A$ (cf figures ci-dessus). Une plaque (ou électrode) possède une charge $+Q$, soit une densité surfacique de charge $\sigma = +Q/A$ et est au potentiel V_+. L'autre plaque à une charge opposée $-Q$ et est au potentiel V_-. On note $U = V_+ - V_-$ la différence de potentiel ou tension entre les deux plaques.

Comme $e \ll A$, on peut considérer les plaques comme infinies. Ainsi, par exemple, la plaque chargée positivement produit un champ électrostatique tel que $\left\|\overrightarrow{E_+}\right\| = \sigma/2\varepsilon_0 = Q/2A\varepsilon_0$. A l'aide des figure ci-dessus, on obtient le champ électrostatique dans chaque région de l'espace :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Entre les plaques: } \vec{E} = \overrightarrow{E_+} + \overrightarrow{E_-} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_x} = \dfrac{Q}{A\varepsilon_0}\overrightarrow{u_x} \\ \text{A l'extérieur des plaques: } \vec{E} = \vec{0} \end{array}}$$

Par définition, la capacité C d'un condensateur s'écrit, quelle que soit sa géométrie :

$$\boxed{C \equiv \frac{Q}{V_+ - V_-} = \frac{Q}{U} \quad \left(\text{définition de la capacité d'un condensateur}\right)}$$

Dans le cas du condensateur plan, il est facile de calculer C. La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ s'écrit ici $E = -dV/dx = U/e$ ce qui donne $\dfrac{Q}{\varepsilon_0 A} = \dfrac{U}{e}$. On trouve immédiatement :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{e} \quad \left(\text{pour un condensateur plan}\right)}$$

On a bien, comme cela a été admis dans le cours d'électrocinétique, proportionnalité entre charge et tension aux bornes d'un condensateur. **La capacité d'un condensateur est un facteur purement géométrique** comme le montre le résultat précédemment obtenu. Dans le cours de PT, vous allez calculer C pour des condensateurs avec d'autres géométries, typiquement sphériques et cylindriques.

Dans la réalité, les plaques ne sont jamais infinies, il y a des effets de bord (que l'on a négligés ici car $e \ll A$). Ainsi le champ $\vec{E}$ n'est plus parfaitement uniforme au bord des plaques comme l'illustre la figure ci-dessous.