

THEOREME DE GAUSS

"La Mathématique est la reine des sciences et l'Arithmétique est la reine des mathématiques."
Johann Carl Friedrich Gauss, (1777-1855), mathématicien, astronome et physicien allemand.

Dans le chapitre précédent, nous avons appris, à partir de la loi de Coulomb, à calculer le champ électrostatique créé par une distribution de charges en un point de l'espace. Un tel calcul n'est pas toujours simple car il fait appel aux intégrales. Nous allons voir qu'il est possible de déterminer de façon plus simple le champ électrostatique à partir du **théorème de Gauss**, à conditions que ce champ possède des symétries spatiales.

On peut montrer que le théorème de Gauss et la loi de Coulomb sont formellement identiques (on peut dériver l'un de l'autre). Mais le théorème de Gauss va nous apporter un point de vue beaucoup plus riche sur la nature du champ électrique que la seule loi de Coulomb (comme le concept d'énergie en mécanique vis-à-vis des lois de Newton). De plus, le théorème de Gauss est toujours valable en régime variable (dépendant du temps) et constitue de se fait une des quatre équations de Maxwell (voir cours de PT) alors que la loi de Coulomb n'est plus valable en régime variable.

I – SYMETRIE DES DISTRIBUTIONS DE CHARGES

Le concept de symétrie joue un rôle très important dans les sciences physiques mais aussi en mathématiques, biologie... Le «modèle standard» qui est la théorie physique qui décrit les interactions entre les particules fondamentales repose sur des propriétés de symétries.

On dit qu'un système possède une propriété de symétrie vis-à-vis d'une certaine transformation (pour nous géométrique) si après avoir subi cette transformation, le système reste identique à ce qu'il était au préalable.

Nous allons décrire dans cette partie des distributions de charges qui possèdent des symétries spatiales particulières. Nous verrons ensuite comment ses symétries vont influencer les symétries du champ électrostatique en vertu du principe de Curie. Le théorème de Gauss seul ne permet pas de déterminer entièrement le champ électrostatique, il faut connaître ces symétries, d'où cette étude préalable.

1.1 Rappels : coordonnées sphériques et coordonnées cylindriques

Les figures ci-dessous rappellent les définitions des systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques, nous en aurons besoin.

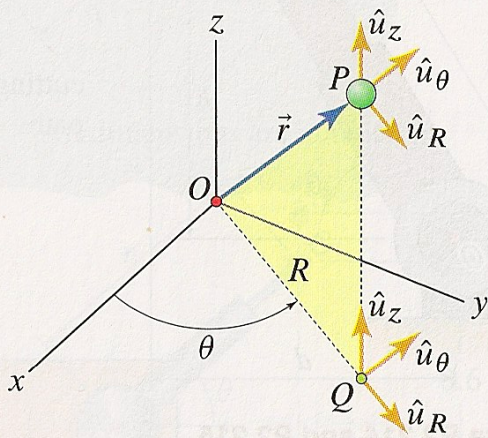


Figure 2.56

Coordinate directions in the cylindrical coordinate system. As with polar coordinates, defined in Section 2.6, the θ coordinate is implicitly contained in \hat{u}_R .

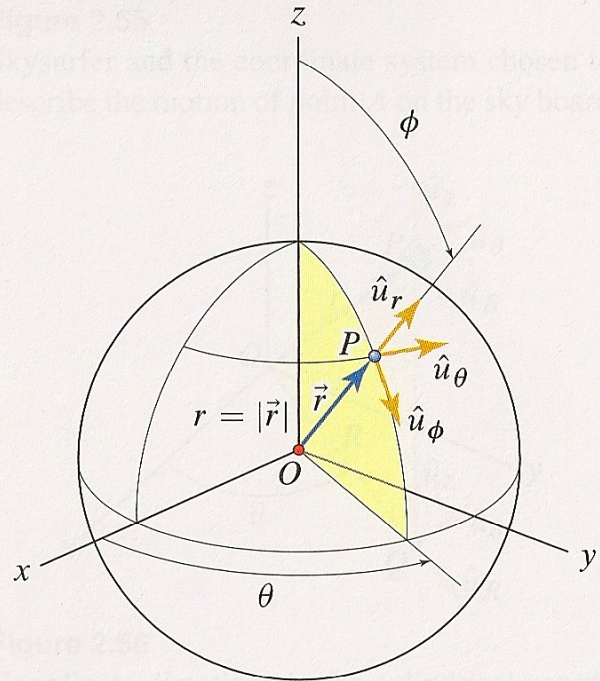


Figure 2.58

Definition of the spherical coordinates and corresponding orthonormal base vectors.

1.2 Symétrie plane

Soit le point M' symétrique du point M par rapport à un plan π dit **plan miroir**. On notera $M' = \text{Sym}_\pi(M)$. Soit une distribution de charges de densité volumique de charges ρ .

Une distribution de charges est **symétrique** par rapport à un plan π si M et M' étant deux points de la distribution de charges tels que $M' = \text{Sym}_\pi(M)$, la densité de charge vérifie $\rho(M') = \rho(M)$.

Par exemple si π est le plan (xOy) , M a pour coordonnées (x, y, z) , M' a pour coordonnées $(x, y, -z)$ et $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z)$.

1.3 Anti-symétrie plane

Une distribution de charges est **anti-symétrique** par rapport à un plan π^* si M et M' étant deux points de la distribution de charges tels que $M' = \text{Sym}_{\pi^*}(M)$, la densité de charge vérifie $\rho(M') = -\rho(M)$.

π^* est appelé **plan antimiroir**.

Par exemple si π^* est le plan (xOy) , M a pour coordonnées (x, y, z) , M' a pour coordonnées $(x, y, -z)$ et $\rho(x, y, z) = -\rho(x, y, -z)$.

1.4 Invariance par translation

Une distribution de charge, illimitée dans la direction d'un axe Δ , est invariante par translation suivant Δ si, pour tout point M appartenant à cette distribution et son translaté M' , sa densité de charge vérifie $\rho(M') = \rho(M)$.

Par exemple si $\Delta = (Oz)$, M ayant pour coordonnées (x, y, z) , M' a alors pour coordonnées $(x, y, \lambda z)$, avec λ un nombre réel quelconque, et $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, \lambda z)$. On peut donc écrire que pour tous z , $\rho(x, y, z) = \rho(x, y)$ est indépendant de z .

Une telle invariance n'est rigoureusement possible que pour une distribution infinie de charge suivant Δ comme par exemple un fil infini.

1.5 Invariance par rotation autour d'un axe

Soit Δ l'axe de rotation et M un point de la distribution de charge. M' est le point obtenu par rotation de M d'un angle quelconque autour de Δ . On note $M' = \text{Rot}_{\Delta}(M)$

Une distribution de charge est invariante par rotation autour de l'axe Δ si, pour tout point M appartenant à cette distribution sa densité de charge vérifie $\rho(M) = \rho(M')$ avec $M' = \text{Rot}_{\Delta}(M)$.

Il est commode de travailler en coordonnées cylindrique. Par exemple si $\Delta = (Oz)$, M ayant pour coordonnées (r, θ, z) , M' a alors pour coordonnées (r, θ', z) et $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta', z)$. Ainsi la densité de charge est indépendante de l'angle θ , on a simplement $\rho = \rho(r, z)$.

1.6 Distribution à symétrie cylindrique

Une distribution de charge possède une symétrie cylindrique si sa densité de charge ρ ne dépend, pas, en coordonnées cylindriques, des variables z et θ . On a simplement $\rho = \rho(r)$.

Une telle distribution est invariante par translation le long de l'axe Δ et invariante par rotation autour de l'axe Δ .

1.7 Distribution à symétrie sphérique

Une distribution de charge possède une symétrie sphérique si sa densité de charge ρ ne dépend, pas, en coordonnées sphériques, des variables θ et φ . On a simplement $\rho = \rho(r)$.

Attention, le r en coordonnées cylindrique n'a pas la même signification que le r en coordonnées sphérique.

1.8 Exemples

FIGURE 28.2 Transformations that don't change an infinite cylinder of charge.

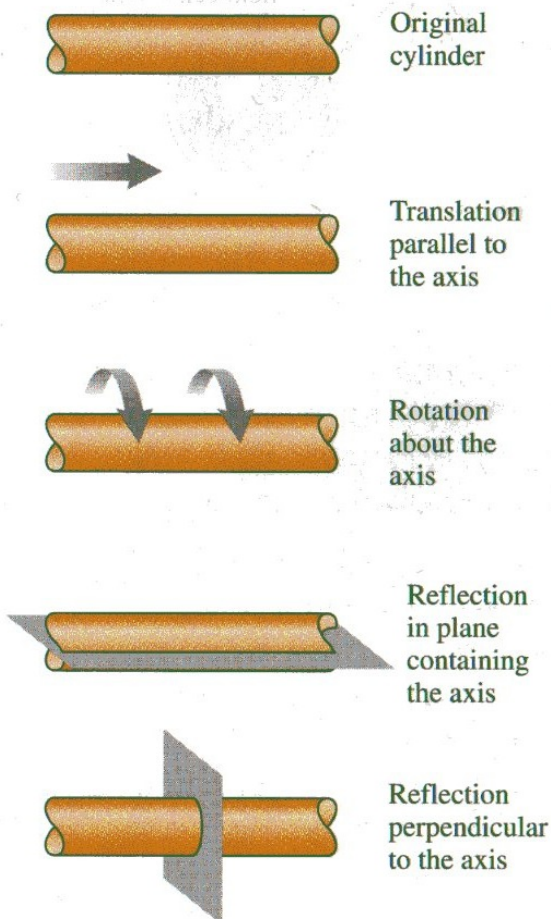
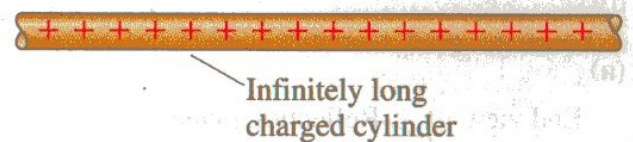


FIGURE 28.1 A charge distribution with cylindrical symmetry.



On considère un cylindre infini uniformément chargé (figure ci-dessus). Cette distribution possède évidemment une symétrie cylindrique ; invariance par translation le long de l'axe du cylindre et invariance par rotation autour de ce même axe. Elle possède aussi deux plan de symétrie (plan miroir).

II – SYMETRIE DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

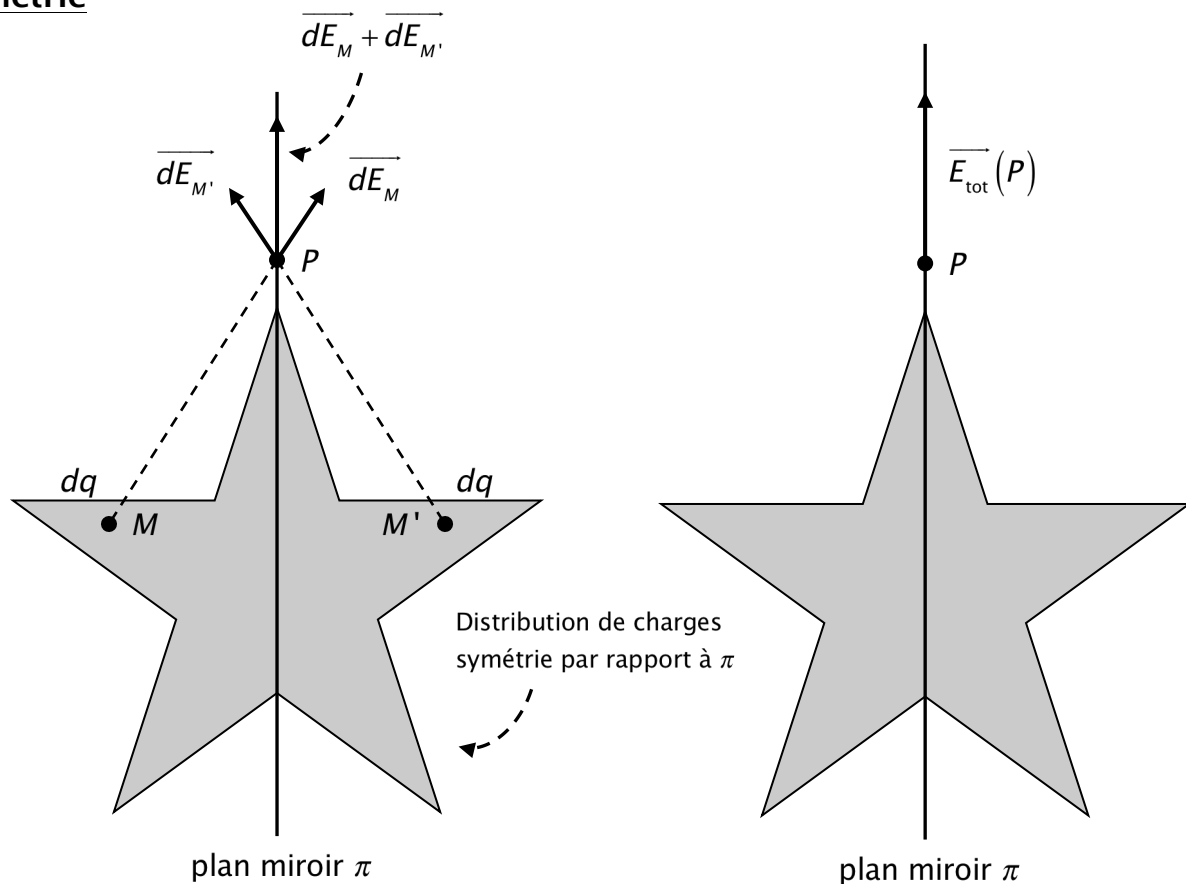
2.1 Principe de Curie

Il s'agit d'un principe très général formulé par le physicien Pierre Curie, le mari de Marie Curie. Ce principe affirme qu'un « **phénomène physique possède au moins les éléments de symétrie de ses causes** ».

Les « causes », c'est-à-dire les sources du champ électrostatique sont les distributions de charges, ainsi en vertu du principe de Curie :

Un champ électrostatique possède au moins les mêmes propriétés d'invariance que la distribution de charge qui est sa source.

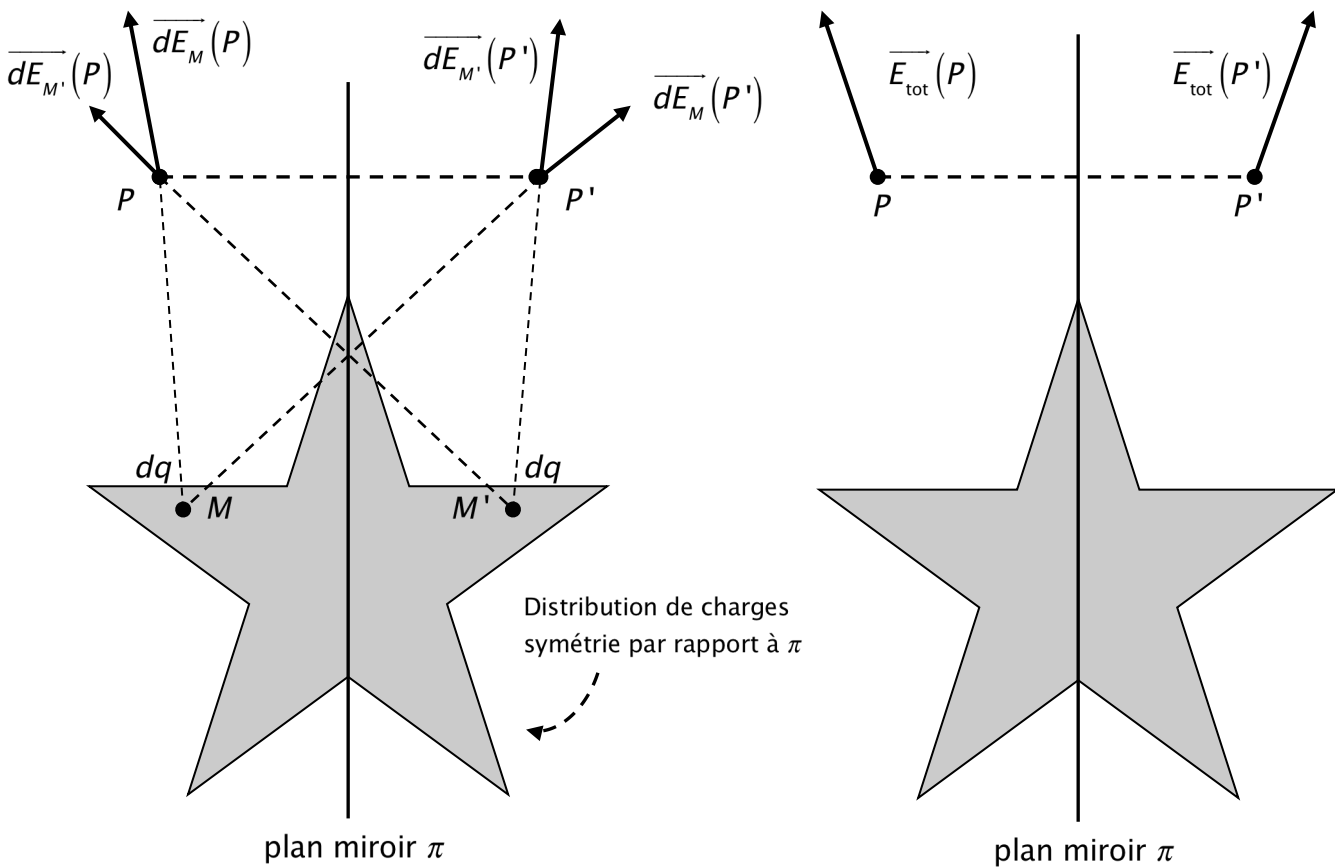
2.2 Champ électrostatique produit par une distribution de charges possédant un plan de symétrie



On considère la distribution de charges ci-dessus symétrique par rapport au plan π . Soit la point M et son symétrique M' . On considère un volume élémentaire autour de M qui contient la charge élémentaire dq . Par symétrie, autour de M' , on a la charge dq . En un point P du plan de symétrie

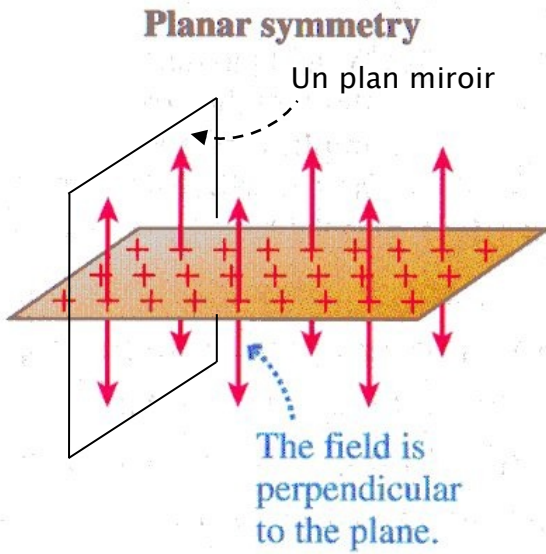
π , $dq(M)$ produit le champ \overline{dE}_M . De même, $dq(M')$ produit le champ $\overline{dE}_{M'}$. Par construction géométrique, à cause des symétrie (voir figure ci-dessus) le champ $\overline{dE}_M + \overline{dE}_{M'}$ appartient au plan π . Le résultat précédent est vrai pour tous les couples de points symétriques (M, M') . On obtient ainsi le résultat suivant :

En un point P d'un plan miroir π d'une distribution de charges, le champ électrostatique total créé par cette distribution de charge appartient au plan miroir π .



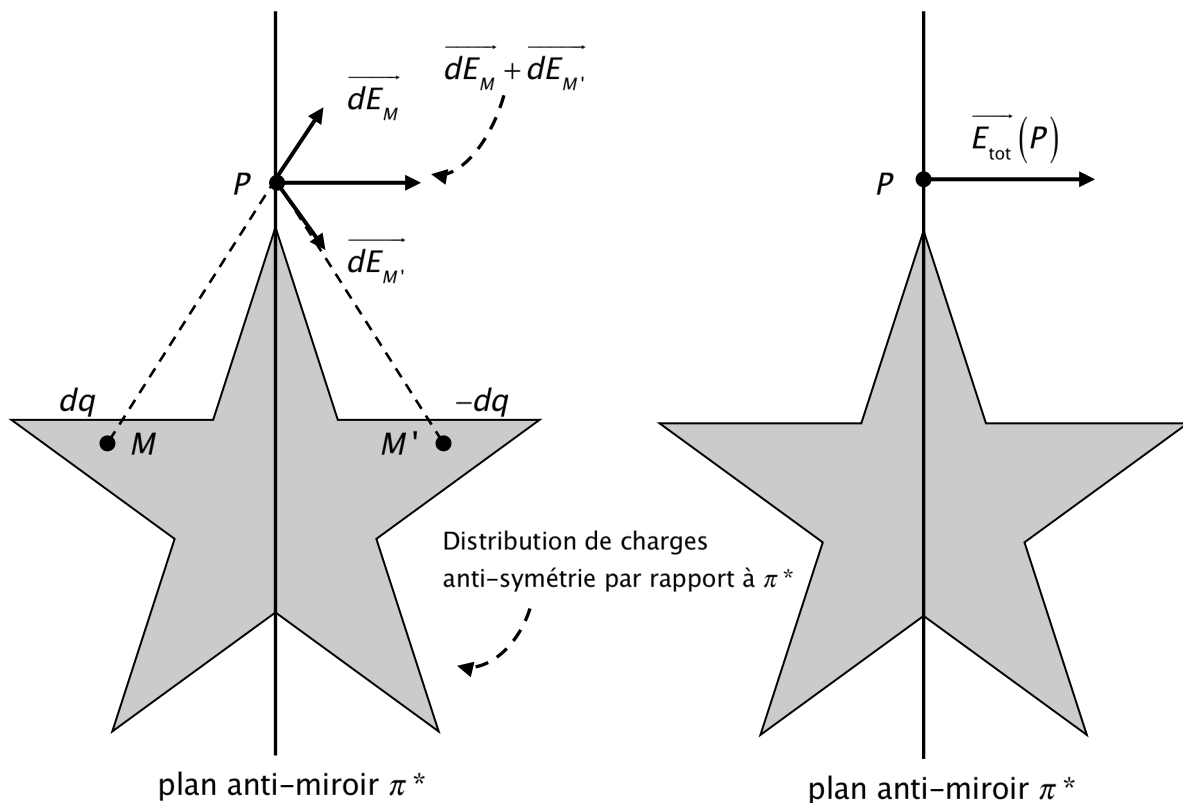
On considère à présent deux points P' et P symétriques par rapport à π mais n'appartenant pas à la distribution de charges. En P , $dq(M)$ et $dq(M')$ produisent le champ $\overline{dE}_M(P) + \overline{dE}_{M'}(P)$, de même en P' , le champ vaut $\overline{dE}_M(P') + \overline{dE}_{M'}(P')$. On constate par construction géométrique, grâce aux symétries (voir figure ci-dessus) que $\overline{dE}_M(P) + \overline{dE}_{M'}(P)$ et $\overline{dE}_M(P') + \overline{dE}_{M'}(P')$ sont symétriques par rapport au plan π . Si on généralise à l'ensemble de la distribution de charges formées de tous les couples symétriques (M, M') , on arrive au résultat important suivant :

Aux points P et P' symétriques par rapport au plan miroir π d'une distribution de charges (mais n'appartenant pas à cette distribution), le champ électrostatique total créé en P est symétrique de celui créé en P' par rapport au plan miroir.



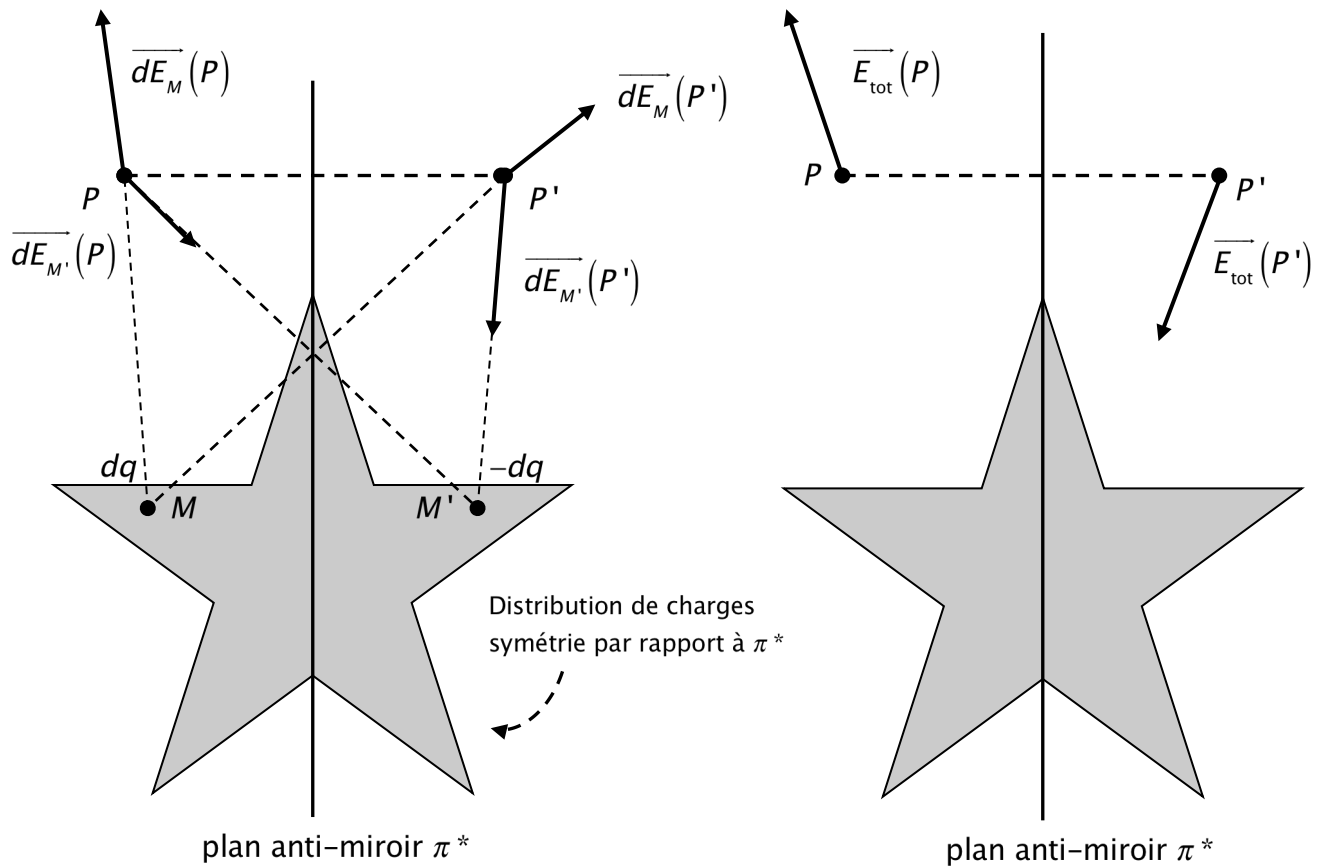
Considérons par exemple, un plan infini, uniformément chargé. Tout plan perpendiculaire à ce plan chargé est un plan miroir pour ce dernier, il existe ici une infinité de plan miroir. D'après ce que l'on vient de voir, le champ électrostatique doit appartenir à tous ces plans miroirs, \vec{E} est donc toujours orthogonal au plan chargé et symétrique par rapport à ce dernier comme cela est illustré sur la figure ci-contre.

2.3 Champ électrostatique produit par une distribution de charges possédant un plan d'anti-symétrie



Ce qui change à présent, c'est que $dq(M) = -dq(M')$. Il suffit d'inverser $d\vec{E}_{M'}$ et on obtient le résultat suivant :

En un point P d'un plan anti-miroir π^* d'une distribution de charges, le champ électrostatique total créé par cette distribution de charge est perpendiculaire au plan anti-miroir π^* .



Si on considère la figure ci-dessus, on obtient le résultat suivant :

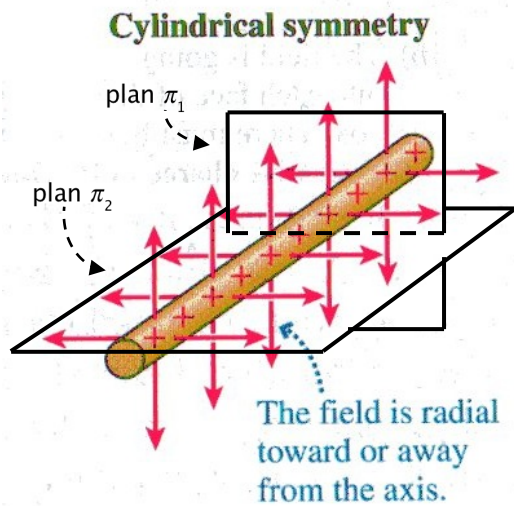
Aux points P et P' symétriques par rapport au plan anti-miroir π^* d'une distribution de charges (mais n'appartenant pas à cette distribution), le champ électrostatique total créé en P est l'opposé du symétrique de celui créé en P' , par rapport au plan anti-miroir.

2.4 Champ créé par une distribution à symétrie cylindrique

On a vu qu'une distribution de charges possède une symétrie cylindrique si sa densité de charge ρ ne dépend pas, en coordonnées cylindriques, des variables z et θ . On a simplement $\rho = \rho(r)$.

Un exemple d'une telle distribution est un cylindre (infiniment long en toute rigueur) uniformément chargé. On prend par commodité l'axe (Oz) comme axe du cylindre. Le principe de curie impose au champ électrostatique créé par cette distribution de charge d'avoir les mêmes symétries que cette dernière donc la norme du champ est telle que $E = E(r)$, E est indépendant des variables z et θ .

De plus tous plans qui coupent le cylindre perpendiculairement à (Oz) est un plan miroir π_1 pour la distribution de charge.



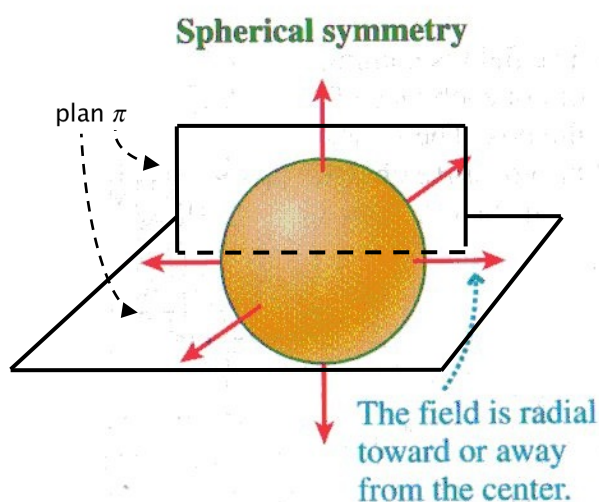
\vec{E} doit appartenir à tous les plans miroirs, cela n'est possible que si $\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r + E_\theta(r)\vec{u}_\theta$. De plus tous plans contenant l'axe (Oz) est aussi un plan miroir π_2 . \vec{E} doit appartenir à la fois aux plans de type π_1 et aux plans de type π_2 . Cela n'est possible que si \vec{E} est purement radial : $\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$.

Les seuls arguments de symétrie nous ont permis d'affirmer que le champ électrostatique ne dépendait que de la variable r et qu'il était radial. Nous avons obtenu beaucoup d'informations sans aucun calcul.

2.5 Distribution à symétrie sphérique

Nous avons vu qu'une distribution de charges possède une symétrie sphérique si sa densité de charges ρ ne dépend, pas, en coordonnées sphériques, des variables θ et φ . On a simplement $\rho = \rho(r)$.

L'exemple type d'une telle distribution est celui d'une sphère uniformément chargée. Le principe de curie impose au champ électrostatique créé par cette distribution de charges d'avoir les mêmes symétries que cette dernière donc la norme du champ est telle que $E = E(r)$, E est indépendant des variables φ et θ . De plus tous plans qui contient le centre de la sphère est un plan miroir.



\vec{E} doit appartenir à tous les plans miroirs, cela n'est possible que si $\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$, \vec{E} est purement radial (attention de ne pas confondre le \vec{u}_r en coordonnées sphériques et le \vec{u}_r des coordonnées cylindriques)

III - LE FLUX DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

3.1 Flux d'un champ électrique uniforme

On peut faire une analogie entre les lignes de champ électrostatique qui traversent une surface et les lignes de courant d'un fluide qui s'écoulent à travers surface. Partant de cette analogie, Gauss (nous allons en reparler) a défini la grandeur appelée **flux du champ électrostatique**. La figure ci-dessous représente une surface plane d'aire A , perpendiculaire aux lignes de champ électrostatique uniforme. Par définition, le flux du champ électrostatique Φ_E qui « traverse » cette surface est :

$$\Phi_E = E A$$

Φ_E s'exprime en $N.m^2.C^{-1}$ ou $V.m$.

Si la surface est inclinée et fait un certain angle avec le champ (figure 3.3 ci-dessous), le nombre de lignes interceptées dépend de A_n , la projection de la surface sur un plan normal aux lignes. Il est équivalent de dire que le flux dépend de la composante de \vec{E} normale à la surface E_n , c'est-à-dire :

$$\Phi_E = E_n A = E A_n$$

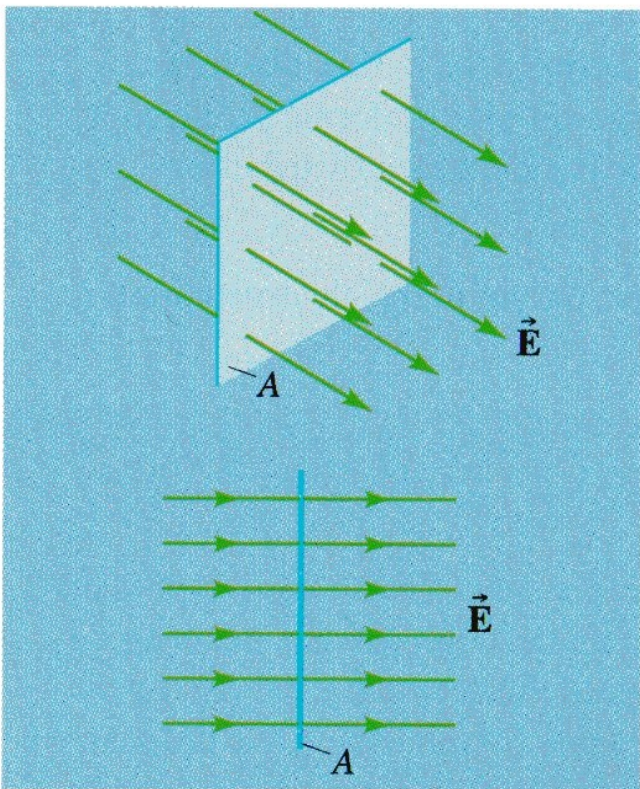


Figure 3.2 ▲
Le flux électrique à travers une surface plane d'aire A est $\Phi_E = EA$.

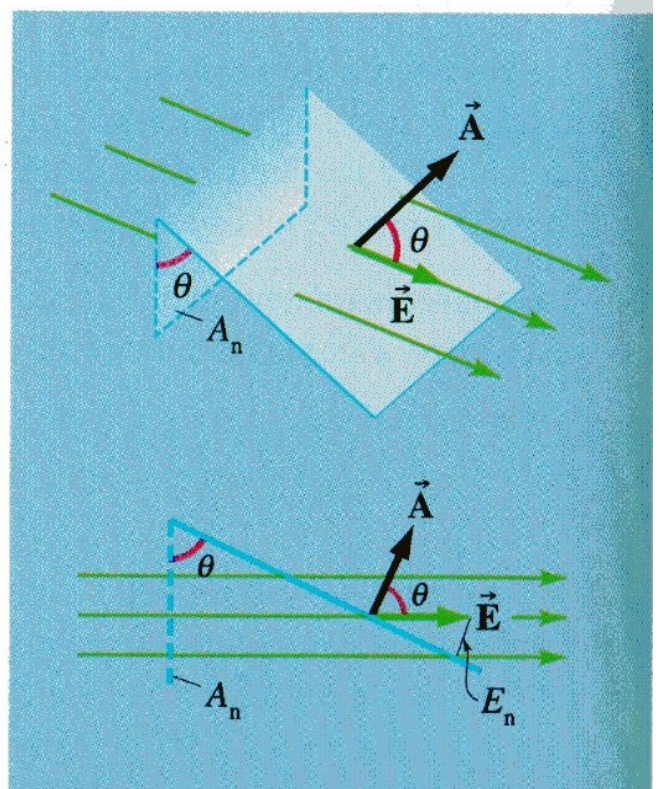


Figure 3.3 ▲
Si la surface est inclinée par rapport au champ, le flux électrique est $\Phi_E = EA \cos \theta$.

L'orientation de la surface peut-être définie par un vecteur surface \vec{A} , de module égale à A et de direction perpendiculaire au plan de la surface. La notation \vec{A} est plutôt la notation anglo-saxonne (A pour area), vous trouverez la notation \vec{S} (S pour surface) dans les ouvrages francophones. Vous être libre de choisir la notation que vous voulez, il suffit de savoir de quoi on parle. L'orientation de \vec{A} reste cependant ambiguë, on peut la prendre pour l'instant tel que Φ_E soit positif. Les deux expressions précédentes sont équivalentes à :

$$\Phi_E = E A \cos \theta$$

θ étant l'angle entre \vec{A} et \vec{E} . On reconnaît l'expression du produit scalaire et on peut dire que le flux associé à un champ électrostatique uniforme s'écrit :

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad \text{Flux pour un champ électrostatique uniforme et surface plane}$$

3.2 Flux d'un champ électrique non uniforme

L'équation précédente doit être modifiée si le champ n'est pas uniforme ou si la surface n'est pas plane. Dans ce cas, on divise la surface en petits éléments $\Delta \vec{A}$ pouvant être considérés comme plans (figure 3.4 ci-dessous). Même si le champ n'est pas uniforme, il ne varie pas sensiblement sur chaque élément d'aire. Le flux total à travers la surface est approximativement égal à la somme :

$$\Phi_E \approx \vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{A}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{A}_2 + \vec{E}_3 \cdot \Delta \vec{A}_3 + \dots = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$$

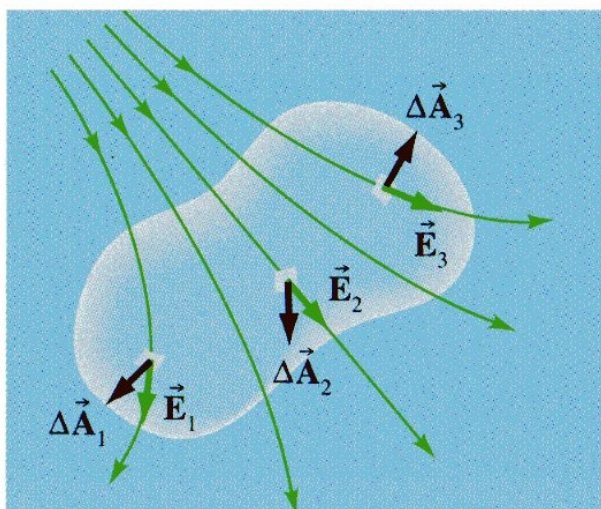


Figure 3.4 ▲

Si la surface n'est pas plane ou si le champ n'est pas uniforme, il faut additionner les contributions au flux provenant des éléments de surface pouvant être considérés comme plans et sur lesquels le champ a une même valeur.

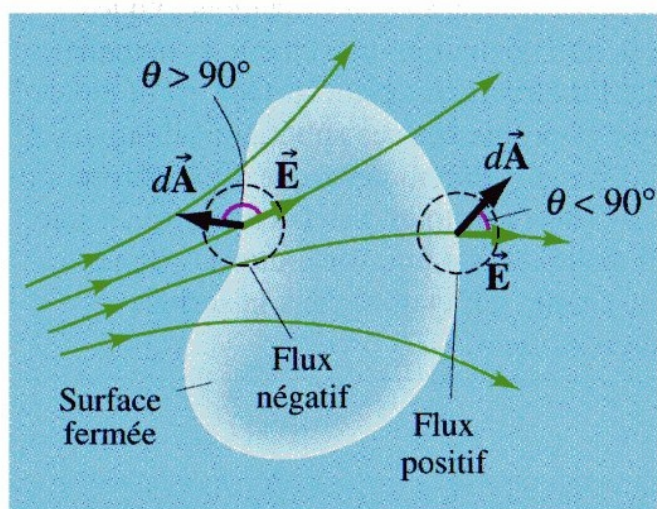


Figure 3.5 ▲

Le flux sortant d'une surface fermée est positif alors que le flux entrant dans une surface fermée est négatif.

A la limite, quand $\Delta\vec{A} \rightarrow \vec{0}$, cette somme, discrète et de valeur approchée, devient une intégrale continue et de valeur exacte. On peut donc écrire la définition générale du flux du champ électrostatique :

Définition générale du flux du champ électrostatique

$$\Phi_E \equiv \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Le membre de droite de l'équation précédente est une intégrale de surface qui peut-être assez difficile à calculer pour une surface quelconques. En revanche, si la distribution de charges est suffisamment symétrique (ce qui sera le cas dans les exercices), on peut considérablement simplifier les calculs en choisissant judicieusement la surface sur laquelle on calcule l'intégrale. C'est ce que l'on fera dans l'application du théorème de Gauss dans le prochain paragraphe.

La figure 3.5 ci-dessus représente des lignes de champ passant à travers une surface fermée imaginaire.

Par définition, le vecteur $d\vec{A}$ est, en un point donné d'une surface fermée, orienté selon la direction de la normale sortant de la surface.

Il s'ensuit, en raison du signe de $d\vec{A}$ que le flux élémentaire $d\Phi_E = E dA \cos\theta$ sortant d'une surface fermée est positif, alors que le flux entrant est négatif. Le flux total à travers la surface est nul puisque le nombre de lignes de champ est égal aux nombres de lignes qui sortent de la surface.

IV – EXPRESSION DU THEOREME DE GAUSS

4.1 Première approche sur un exemple, charge ponctuelle

On considère une charge ponctuelle q et une **surface fictive** sphérique de rayon r centrée sur la charge. Quel est le flux Φ_E du champ électrostatique créé par q à travers cette surface fictive ?

On sait que le champ d'une charge ponctuelle est radial et vaut $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$ ce qui va simplifier le

calcul du flux $\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$. En tout point de la surface, la norme de \vec{E} est constante et \vec{E} est

colinéaire au vecteur surface $d\vec{A}$. En effet, ce dernier est aussi radial car la surface est sphérique

$$d\vec{A} = dA \vec{u}_r. \text{ Ainsi } \Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \equiv \oiint_A E dA \quad \begin{array}{l} \vec{E} \text{ et } d\vec{A} \text{ collinéaire} \\ E = \text{constante sur la surface} \end{array} \equiv E \oiint_A dA = E A_{\text{sphère}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} 4\pi r^2. \text{ On}$$

obtient un résultat très simple : $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$.

Le calcul de l'intégrale de surface a été très simple à conduire car nous avons choisi **une surface qui possède les mêmes symétries que le champ électrostatique**. Nous verrons qu'il faudra toujours procéder de la sorte. Le résultat obtenu nous dit que le flux du champ électrostatique à travers la surface fermée est égal à la charge intérieure à cette surface divisée par la constante ϵ_0 . Ce résultat a une portée beaucoup plus grande que le simple exemple étudié et constitue le **théorème de Gauss**.

4.1 Formulation du théorème de Gauss

Soit une surface fermée de forme quelconque contenant une charge totale Q_{int} .

Le flux du champ électrostatique à travers cette surface vaut $Q_{\text{int}}/\epsilon_0$.

$$\text{Expression mathématique: } \Phi_E \equiv \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Commentaires :

- Ce théorème peut être démontré à partir de la loi de Coulomb mais il est plus général que cette dernière car il est vrai, comme on l'a déjà noté, en régime variable. Il constitue de ce fait une des quatre équations de Maxwell. On peut prendre le théorème de Gauss comme un principe dont les conséquences ont toujours été vérifiées expérimentalement. La loi de Coulomb se démontre donc à partir de ce théorème, il suffit de reprendre l'exemple du 4.1 à l'envers.

- La source du champ \vec{E} , dont on calcule le flux Φ_E , n'est pas seulement constituée de Q_{int} . Il peut y avoir des charges à l'extérieur de la surface fermée Q_{ext} . Cependant Q_{ext} ne jouera aucun rôle dans la valeur de Φ_E .



Johann Carl Friedrich Gauss (30 avril 1777 – 23 février 1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Nous l'avons déjà rencontré en optique (les conditions de Gauss) et vous l'avez sûrement rencontré en mathématiques.

V - APPLICATION : CALCUL DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

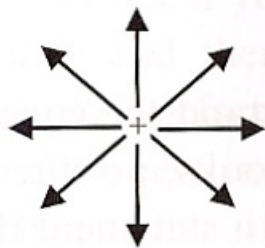
5.1 Méthode

Le théorème de Gauss est un outil très puissant pour déterminer le champ électrostatique mais uniquement pour des distributions de charges possédant des symétries (typiquement sphérique, cylindrique, plane) ce qui sera toujours le cas en classes préparatoires. Les calculs de champs électrostatiques avec des distributions de charges complexes se font numériquement par informatique comme ce que l'on a fait avec Maple par exemple.

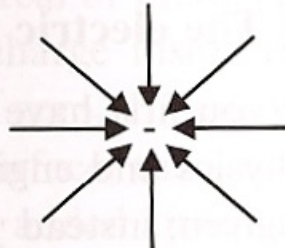
Pour déterminer \vec{E} à partir du théorème de Gauss, il faudra suivre la démarche suivante :

⇒ Déterminer la **direction** du champ \vec{E} à partir des considérations de **symétries** (radiale pour des géométries cylindriques et sphériques, normale pour des géométrie planes). Les symétries permettent aussi de réduire le nombre de variables d'espace dont dépend la norme de \vec{E} .

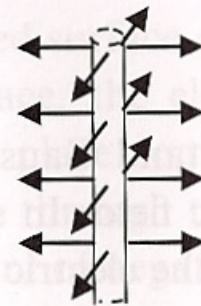
La figure ci-dessous représente la direction de \vec{E} pour les principales distributions de charges rencontrées dans le cours.



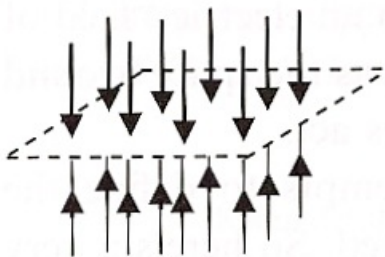
Positive point charge



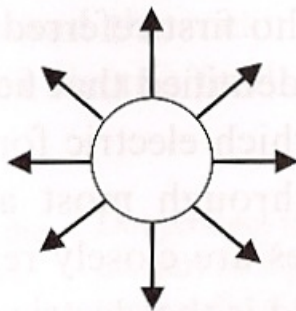
Negative point charge



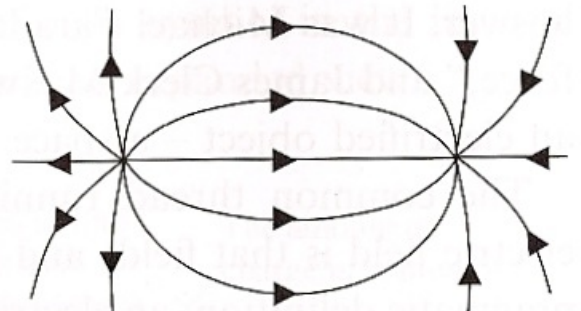
Infinite line of positive charge



Infinite plane of negative charge



Positively charged conducting sphere



Electric dipole with positive charge on left

⇒ Choisir une **surface de Gauss imaginaire** dans la région où l'on souhaite déterminer \vec{E} . Il faudra que la surface de Gauss possède les mêmes propriétés de symétrie que la distribution de charges et donc que du champ électrostatique.

⇒ Calculer le **flux du champ électrostatique** à travers la surface de Gauss choisie $\oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$. Le

calcul de l'intégrale de surface sera très simple si l'on choisie une surface de Gauss ayant les mêmes symétries que \vec{E} . La plupart du temps nous allons rencontrer les cas suivants (voir les exemples des paragraphes suivants) :

$$\oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \begin{cases} E \times 4\pi r^2 & (\text{sphere de rayon } r) \\ E \times 2\pi rL & (\text{flux latéral sur un cylindre de rayon } r \text{ et de longueur } L) \\ 2E \times A & (\text{flux sur les deux bases d'un cylindre de base } A) \end{cases}$$

⇒ Calculer la **charge intérieure** à la surface de Gauss Q_{int} . Il faudra calculer Q_{int} avec la densité de charge appropriée :

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \text{linéique: } \int_L \lambda d\ell & \stackrel{\equiv}{=} \lambda \ell \\ & \text{Si } \lambda \text{ est uniforme} \\ \text{surfacing: } \iint_S \sigma dS & \stackrel{\equiv}{=} \sigma S \\ & \text{Si } \sigma \text{ est uniforme} \\ \text{volumique: } \iiint_V \rho dV & \stackrel{\equiv}{=} \rho V \\ & \text{Si } \rho \text{ est uniforme} \end{cases}$$

⇒ Appliquer le **théorème de Gauss** $\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ et en déduire E .

5.2 Champ électrostatique produit par une sphère uniformément chargée : symétrie sphérique

Problème : On considère une sphère de rayon R qui contient une charge totale Q uniformément répartie. Que vaut le champ électrostatique \vec{E} en un point extérieur de la sphère et en un point intérieur à la sphère ?

Méthodes et calculs présentés au tableau

5.3 Champ électrostatique produit par un fil uniformément chargé: symétrie cylindrique

Problème : Que vaut le champ électrostatique \vec{E} créé par un fil (unidimensionnel) infini de densité de charges uniforme λ ?

Méthodes et calculs présentés au tableau.

5.4 Champ électrostatique produit par un plan infini uniformément chargé: symétrie plane

Problème : Que vaut le champ électrostatique \vec{E} créé par un plan infini de densité de charges uniforme σ ?

Méthodes et calculs présentés au tableau.

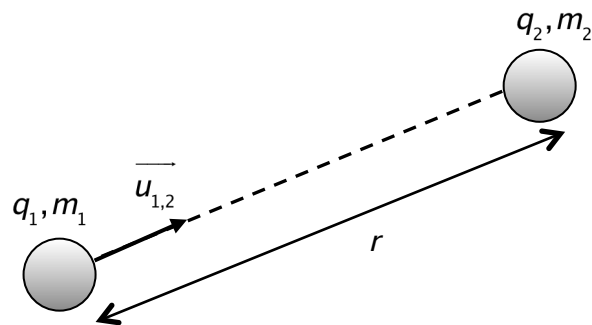
5.5 Champ électrique produit par des distributions simples de charges et que l'on peut déterminer par utilisation du théorème de Gauss

Table 1.1. *Electric field equations for simple objects*

Point charge (charge = q)	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ (at distance r from q)
Conducting sphere (charge = Q)	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$ (outside, distance r from center) $\vec{E} = 0$ (inside)
Uniformly charged insulating sphere (charge = Q , radius = r_0)	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$ (outside, distance r from center) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{r_0^3} \hat{r}$ (inside, distance r from center)
Infinite line charge (linear charge density = λ)	$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r}$ (distance r from line)
Infinite flat plane (surface charge density = σ)	$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$

(Dans ce tableau \hat{r} est le vecteur unitaire radial et \hat{n} le vecteur unitaire normale à la surface)

VI - ANALOGIE ENTRE L'ELECTROSTATIQUE ET LA GRAVITATION



ELECTROSTATIQUE	GRAVITATION
Force électrostatique entre deux charges, attractive ou répulsive: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1,2}$ $\vec{u}_{1,2}$ vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2	Force de gravitation entre deux masses, toujours attractive: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1,2}$ $\vec{u}_{1,2}$ vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2
Charge q	Masse m
Constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	Constante $-G$
Champ électrostatique créé par une charge q : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$	Champ gravitationnel créé par une masse m : $\vec{g} = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$
Force subit par une particule test q_0 dans le champ électrostatique : $\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}$	Force subit par une particule test m_0 dans le champ gravitationnel : $\vec{F}_0 = m_0 \vec{g}$
Théorème de Gauss : $\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ $Q_{\text{int}} = \iiint_{V_{\text{int}}} \rho_{\text{int}} dV$	Théorème de Gauss : $\Phi_g = \oiint_A \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G M_{\text{int}}$ $M_{\text{int}} = \iiint_{V_{\text{int}}} \rho_{\text{int}} dV$

Ce tableau sera complété dans le chapitre suivant quand nous aurons étudié le potentiel électrostatique qui est lié au concept d'énergie potentielle.

Nous utiliserons en TD le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel.