CIRCUITS LINEAIRES DIPOLES LINEAIRES

« La force qui fait le plus de fois le tour de la terre en une seconde, ce n'est pas l'électricité, c'est la douleur »
Marcel Proust

Les dipôles des circuits que nous allons étudier sont **linéaires**. Cela signifie que la relation (on parle de **caractéristique**) qui relie $u(t)$ et $i(t)$ est une équation différentielle à coefficients constants.

I – Eléments dipôlaires passifs fondamentaux

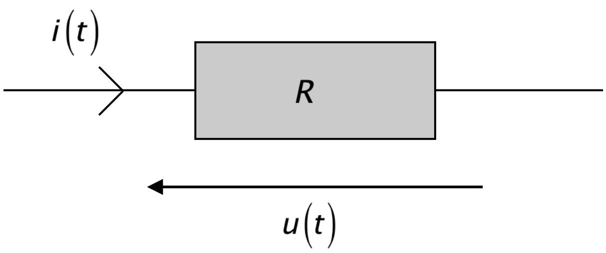
On se place dans cette partie en **convention récepteur**.

1.1 Résistance (symbole R)

La résistance est un élément qui résiste à l'écoulement des charges électriques

a) Caractéristique

$$u(t) = R\,i(t) \text{ où } i(t) = G\,u(t) \text{ avec } R = \frac{1}{G}$$

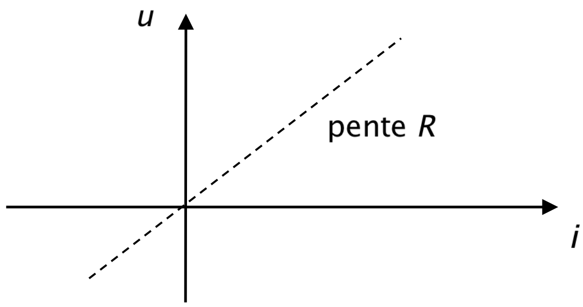


$u(t) \equiv$ tension (V)

$i(t) \equiv$ intensité (A)

$R \equiv$ résistance (Ω)

$G \equiv$ conductance $(\Omega^{-1} = \mathrm{S})$



Georg Simon Ohm, 1787-1854, physicien allemand. Utilisant ces résultats expérimentaux, il détermine les relations fondamentales entre courant, tension et résistance électrique, ce qui constitue le départ de l'analyse des circuits électriques.

Ordres de grandeurs des résistances

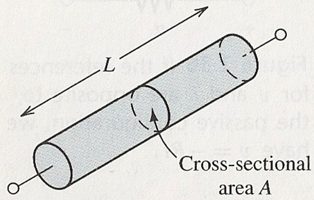


Figure 1.38 Resistors often take the form of a long cylinder (or bar) in which current enters one end and flows along the length.

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

Table 1.3. Resistivity Values (Ωm) for Selected Materials at 300 K

Conductors	
Aluminum	2.73×10^{-8}
Carbon (amorphous)	3.5×10^{-5}
Copper	1.72×10^{-8}
Gold	2.27×10^{-8}
Nichrome	1.12×10^{-6}
Silver	1.63×10^{-8}
Tungsten	5.44×10^{-8}
Semiconductors	
Silicon (device grade)	10^{-5} to 1
depends on impurity concentration	
Insulators	
Fused quartz	$> 10^{21}$
Glass (typical)	1×10^{12}
Teflon	1×10^{19}

b) Aspect énergétique

$$\boxed{P(t) = u(t)\,i(t) = R\,i(t)^2 \geq 0}$$

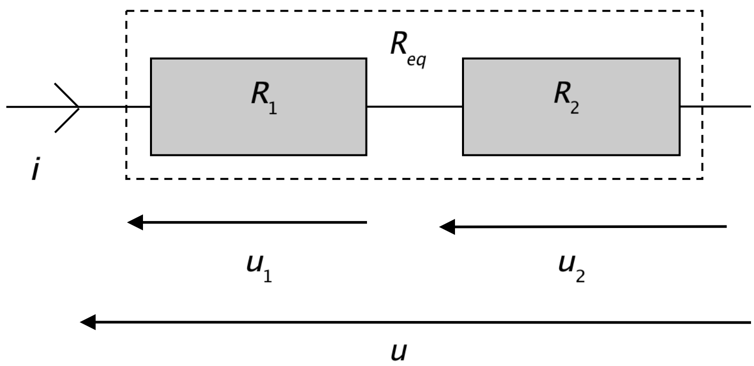
Il s'agit de l'expression la plus courante de la puissance. On peut aussi écrire suivant les cas $P(t) = \frac{u^2}{R} = G\,u^2 = \frac{i^2}{G}$. La **résistance absorbe toujours de l'énergie**, elle s'échauffe (effet thermique). L'énergie n'est jamais restituée au circuit.

c) Résistance en série et pont diviseur de tension

$$u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = \underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_{eq}} i = R_{eq} i$$

La généralisation à N résistance en série est immédiate :

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_N = \sum_{n=1}^{N} R_n}$$



Revenons au cas de deux résistances en série : $\frac{u_1}{u} = \frac{R_1 i}{(R_1 + R_2)\,i}$. On arrive à des expressions très utiles pour calculer des tensions sans passer par les intensités, on parle **de pont diviseur de tension** :

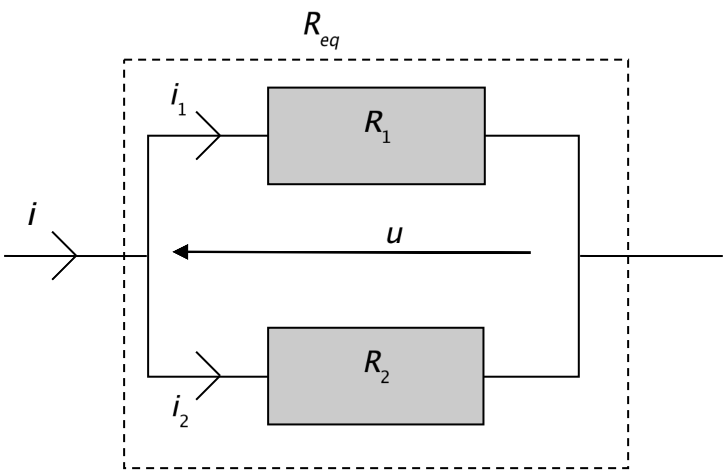
Pont diviseur de tension:

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u \qquad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

Dans le cas de N résistance en série, on obtient de même : $u_n = \dfrac{R_n}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N} u$. Cette expression sera peu utilisée.

c) Résistance en parallèle et pont diviseur de courant

$$i = i_1 + i_2 = G_1 u + G_2 u = \underbrace{\left(G_1 + G_2\right)}_{G_{eq}} u = G_{eq} u$$



La généralisation à N résistance en parallèle est immédiate :

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \ldots + G_N = \sum_{n=1}^{N} G_n$$
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{R_n}$$

Notons que pour deux résistances en parallèle, on peut écrire :

$$\boxed{R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

Il s'agit d'un résultat très pratique.

Revenons au cas de deux résistances en parallèle : $\dfrac{i_1}{i} = \dfrac{G_1 u}{\left(G_1 + G_2\right) u}$. On arrive à des expressions très utiles pour calculer les courants sans passer par les tensions, on parle de **pont diviseur de courant** :

Pont diviseur de courant:

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$
$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Dans le cas de N résistance en parallèle, on obtient de même : $i_n = \dfrac{G_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_N} i$. Cette expression sera peu utilisée.

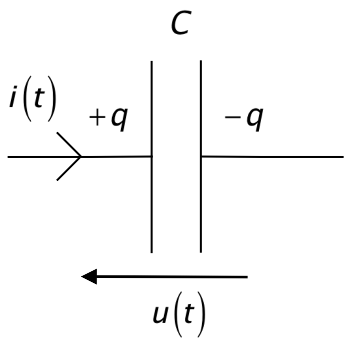
1.2 Condensateur idéal (symbole C)

Un condensateur élémentaire est constitué de deux plaques conductrices séparées par un isolant. Une plaque porte la charge $+q(t)$ et l'autre la charge $-q(t)$. Il peut stocker de l'énergie dans le champ électrique qui règne entre ces plaques.

Une étude plus détaillée du condensateur plan sera conduite dans le cours d'électrostatique de PTSI. Dans le cours d'électromagnétisme de PT, vous étudierez le condensateur de façon plus générale et vous rencontrerez le condensateur cylindrique, sphérique etc…

a) Caractéristique

Avant d'écrire la caractéristique du condensateur, il faut définir la capacité du condensateur (cf. cours d'électromagnétisme de PTSI et PT) :



$$\boxed{q = C\,u}$$

$q \equiv$ charge (C)

$C \equiv$ capacité du condensateur $(\mathrm{F}$ pour Farad$)$, facteur purement géométrique

$u \equiv$ tension (V)

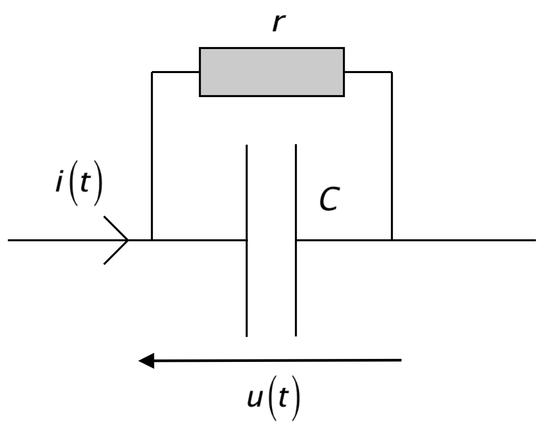
$$\boxed{i(t) \equiv \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du(t)}{dt}}$$

• Si $u =$ constante alors $i = 0$.

En statique (DC), un condensateur idéal se comporte comme un interrupteur ouvert.

• Un condensateur réel possède une résistance interne que l'on peut prendre en compte en rajoutant une résistance en parallèle du condensateur, cf. schéma ci-contre. Si r est très grande, on s'approche du cas idéal.

• Par intégration: $u(t) - u(t_0) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$



Ordres de grandeurs des capacités

1 farad est une très importante valeur de capacité. Dans de nombreuses applications, l'unité la plus appropriée est le microfarad $(1\ \mu F = 10^{-6}\ \mathrm{F})$ et le picofarad $(1\ \mathrm{pF} = 10^{-12}\ \mathrm{F})$.

Par exemple, le flash d'un téléphone portable utilise une capacité de quelques centaines de microfarad. La capacité d'un circuit de poste radio est de l'ordre de 10 à 100 picofarad.

b) Aspect énergétique

$P = u\,i = C\,u\dfrac{du}{dt} \geq 0$ ou ≤ 0.

$E_C\left(\text{Energie stockée dans le condensateur en J}\right) = \int_{t_0}^{t} P\left(t\right)dt = C\int_{t_0}^{t} u\dfrac{du}{dt}dt = C\int_{u_0}^{u} u\,du = \dfrac{1}{2}C\left[u^2\right]_{u_0}^{u}$

Si à t_0, $u_0 = 0$ (le condensateur est initialement déchargé), on arrive au résultat suivant :

$$E_C = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{q^2}{2C}$$

L'énergie stockée par le condensateur peut être entièrement redonnée au circuit dans le cas du condensateur idéal, ce dernier se comporte alors comme un générateur. Pour un condensateur réel, une partie de l'énergie est dissipée dans la résistance interne.

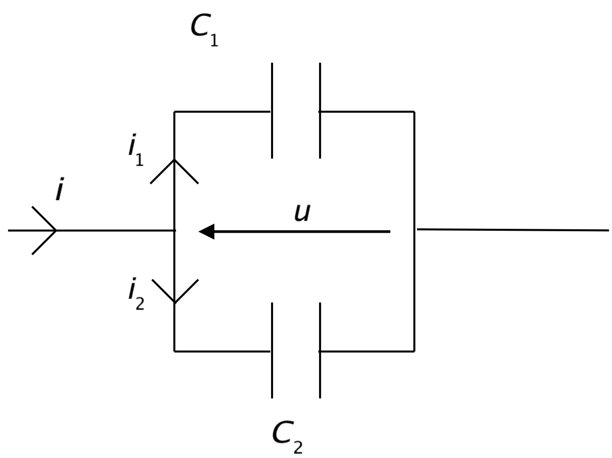
Comme $P = C\,u\dfrac{du}{dt}$, si $u\left(t\right)$ subit une discontinuité, par exemple si u est une fonction créneau, alors $\dfrac{du}{dt} \to +\infty$ et $P \to +\infty$. On ne peut pas avoir une puissance infinie (dans ce cas, le problème de la ressource énergétique de la planète serait résolu !). on arrive donc à la conclusion importante suivante :

La tension $u\left(t\right)$ aux bornes d'un condensateur, ainsi que $q\left(t\right)$, ne peuvent pas subir de discontinuité.

Un condensateur peut servir à « lisser » les tensions et donc à éviter des variations brutales de ces dernières (ce qui peut endommager les installations électriques).

c) Association de condensateurs en parallèles

$i = i_1 + i_2 = C_1\dfrac{du}{dt} + C_2\dfrac{du}{dt} = \underbrace{\left(C_1 + C_2\right)}_{C_{eq}}\dfrac{du}{dt}$

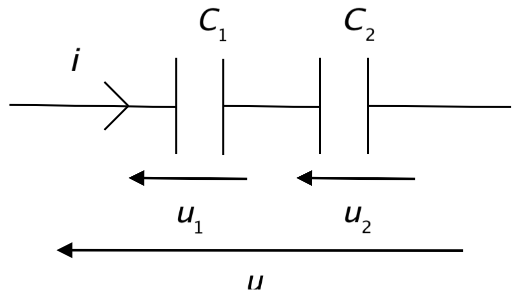


La généralisation à N condensateurs en parallèle est immédiate :

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N = \sum_{n=1}^{N} C_n$$

d) Association de condensateurs en série

$$u = u_1 + u_2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2} = \underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}_{1/C_{eq}} i$$



La généralisation à N condensateurs en série est immédiate :

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n}}$$

Notons que pour deux condensateurs en série, on peut écrire : $\boxed{C_{eq} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$. Il s'agit d'un résultat très pratique.

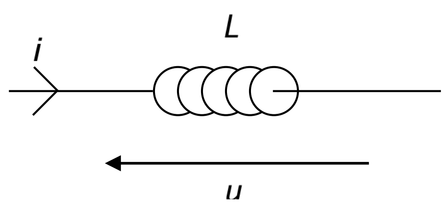
1.3 Inductance (bobine) idéale (symbole L)

Une inductance est constituée d'un enroulement de fils conducteurs sur un matériau ferreux. Elle peut stocker de l'énergie dans son champ magnétique.

L'étude des phénomènes physiques (phénomènes d'induction) mise en jeu dans une inductance fait partie du cours d'électromagnétisme de PT.

a) Caractéristique

$$\boxed{u(t) = L \frac{di(t)}{dt}}$$

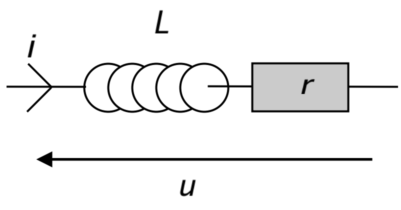


$L \equiv$ inductance (H pour Henry)

- Si $i =$ constante alors $u = 0$.

En statique (DC), une bobine idéale se comporte comme un simple fil sans résistance.

- Une bobine réelle possède une résistance interne que l'on peut prendre en compte en rajoutant une résistance en série à la bobine, cf. schéma ci-contre. Dans ce cas, $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} + r\,i$. Si r est très faible, on s'approche du cas idéal.



- Par intégration: $i(t) - i(t_0) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{t_0}^{t} u(t)\,dt$

Ordres de grandeurs des capacités

Comme pour le farad, le henry est une assez importante unité d'inductance. Les valeurs typiques d'inductances que l'on va rencontrer seront comprises entre le milli-henry et le micro-henry. Cependant, suivant les domaines, les valeurs d'inductances sont très variables : l'inductance d'un moteur de TGV ne sera pas du même ordre de grandeur que l'inductance de la salle de TP !

b) Aspect énergétique

$P = u\,i = Li\dfrac{di}{dt} \geq 0$ ou ≤ 0.

E_L (Energie stockée dans la bobine en J) $= \displaystyle\int_{t_0}^{t} P(t)\,dt = L\int_{t_0}^{t} i\frac{di}{dt}dt = L\int_{i_0}^{i} i\,di = \frac{1}{2}L\left[i^2\right]_{i_0}^{i}$

Si à t_0, $i_0 = 0$ on arrive au résultat suivant : $\boxed{E_L = \dfrac{1}{2}Li^2}$

L'énergie stockée par la bobine peut être entièrement redonnée au circuit dans le cas d'une bobine idéale, cette dernière se comporte alors comme un générateur. Pour une bobine réelle, une partie de l'énergie est dissipée dans la résistance interne.

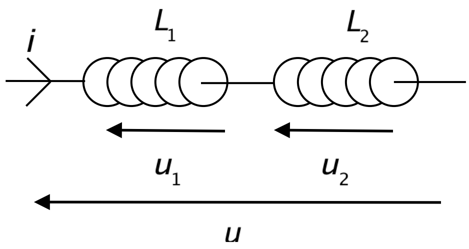
Comme $P = L\,i\dfrac{di}{dt}$, si $i(t)$ subit une discontinuité, par exemple si i est une fonction créneau, alors $\dfrac{di}{dt} \to +\infty$ et $P \to +\infty$. On ne peut pas, encore une fois, avoir une puissance infinie. On arrive donc à la conclusion importante suivante :

Le courant $i(t)$ à travers une bobine ne peut pas subir de discontinuité.

Une bobine peut servir à « lisser » les intensités et donc à éviter des variations brutales de ces dernières (ce qui peut endommager les installations électriques).

c) Association de bobines en série

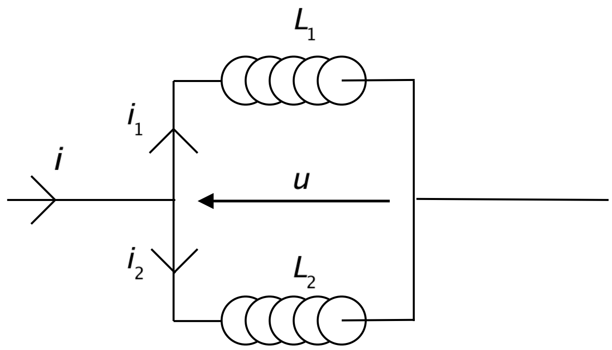
$$u = u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = \underbrace{(L_1 + L_2)}_{L_{eq}} \frac{du}{dt}$$



La généralisation à N bobines en série est immédiate: $\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N = \sum_{n=1}^{N} L_n}$

d) Association de bobines en parallèle

$$i = i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} = \underbrace{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}_{1/L_{eq}} u$$



La généralisation à N bobines en parallèle est immédiate: $\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L_n}}$

Notons que pour deux bobines en parallèle, on peut écrire : $\boxed{L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}}$. Il s'agit d'un résultat très pratique.

II – Source de tension, modèle de Thévenin

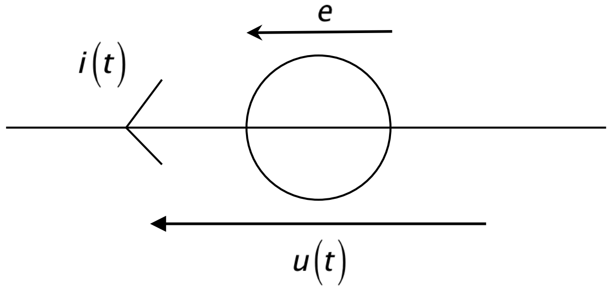
Il s'agit d'une des sources d'énergie principales des circuits. Les bobines et les condensateurs ne peuvent pas fournir assez d'énergie pour toutes les applications. On se place dans cette partie en **convention générateur**.

2.1 Sources idéales de tension

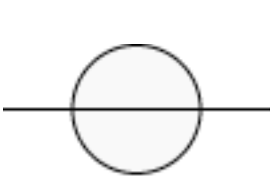
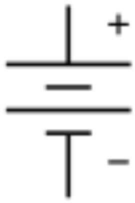
Une source idéale indépendante est un élément actif qui délivre une tension spécifique indépendamment des autres éléments du circuit.

$\forall i \quad u = e(t)$

$(e \equiv \text{force électromotrice notée f.e.m})$



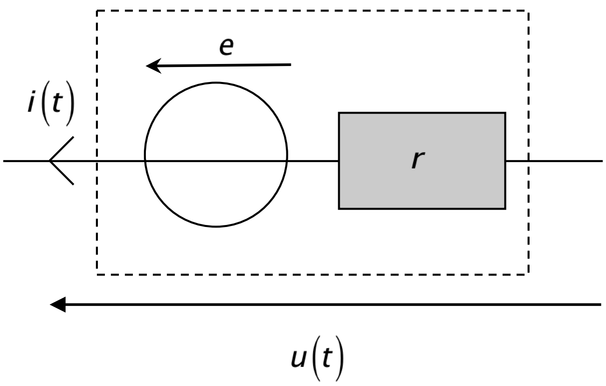
Il existe plusieurs symboles pour un générateur de tension, il n'est pas toujours facile de s'y repérer ! (cf. tableau suivant)

			
Générateur de tension	Source de tension continue	Source de tension alternative	Source de tension constante (baterrie)

2.2 Modélisation d'une source de tension réelle

Modèle de **THEVENIN**

(générateur de tension)



$$\boxed{u = e - r\,i}$$

Si r est petit ou i petit, on s'approche du générateur idéal.

III – Point de fonctionnement d'un circuit

Associons deux dipôles afin de former un circuit, l'un des dipôles étant nécessairement actif. On se propose de déterminer l'intensité du courant dans le circuit, ainsi que la tension aux bornes des dipôles.

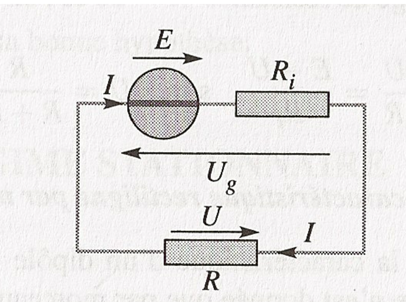


FIG. 1.38.

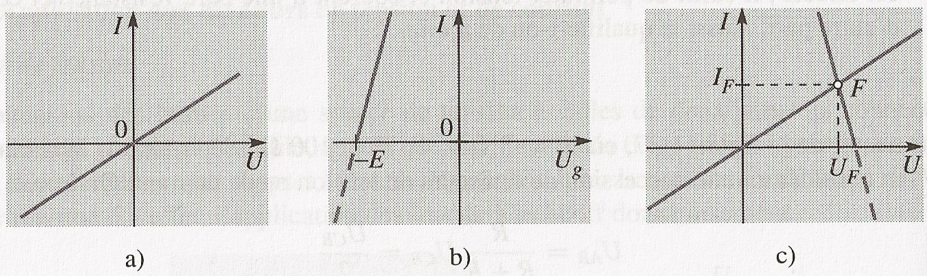


FIG. 1.39.

On considère le circuit simple de la figure 1.38 qui associe un générateur de tension réel avec une résistance.

Pour la résistance, $I = U/R$ (caractéristique de la figure a) 1.39). Pour le générateur $I = \left(E + U_g\right)/R_i$ (caractéristique sur la figure b) 1.39). Comme $U_g = -U$, on détermine graphiquement **le point de fonctionnement** en portant les deux caractéristiques sur un même graphique, celle de la résistance et celle du générateur. Après changement de U_g en $-U$ (figure c) 1.39) :

$$I = \frac{U}{R} \text{ et } I = \frac{E - U}{R_i}$$

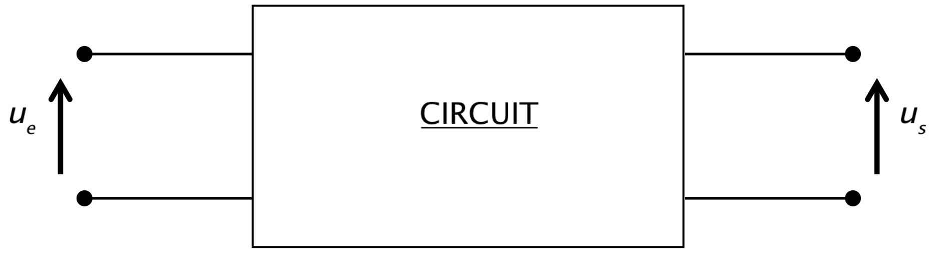
Le point de fonctionnement est évidemment donné par l'intersection des deux droites puisque les tensions aux bornes des deux dipôles doivent être égales.

Exercice d'application 1

Pour un générateur de fem $1{,}5\ \text{V}$ et de résistance interne $R = 5\ \Omega$ débitant dans une résistance de $R = 20\ \Omega$, déterminer le point de fonctionnement du circuit, c'est-à-dire déterminer I et U.

IV – Résistance d'entrée et de sortie d'un circuit

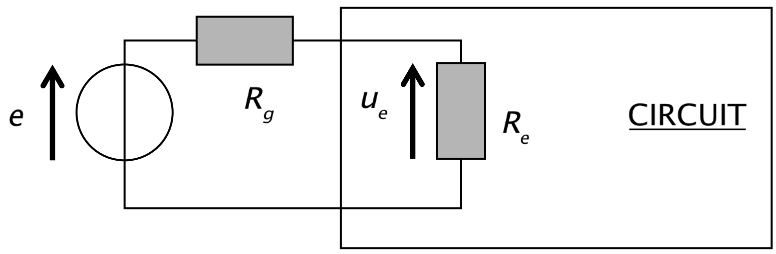
Le traitement des signaux électriques (amplification, filtrage) d'effectue à l'aide de circuits dont le plus simple comprend une entrée et une sortie (cf. figure suivante).



4.1 Maille d'entrée

Vu de l'entrée, le circuit se présente comme un dipôle aux bornes duquel s'applique la tension d'entrée u_e et à travers lequel circule un courant électrique d'intensité i_e. Lorsque la caractéristique (u_e, i_e) est linéaire, le circuit est équivalent à une résistance vis-à-vis de la maille d'entrée, on définit alors sa **résistance d'entrée** par $R_e = u_e / i_e$. Un générateur de tension à vide e et de résistance interne R_g étant branché sur l'entrée du circuit, on peut définir un schéma équivalent électrique relatif à la maille d'entrée. Un diviseur de tension apparaît et la relation entre les tensions est alors :

$$\boxed{u_e = e\frac{R_e}{R_e + R_g}}$$



Tant que la résistance d'entrée est très supérieure à la résistance interne du générateur, $R_e \gg R_g$, les deux tensions e et u_e sont quasiment identiques : $u_e \simeq e$.

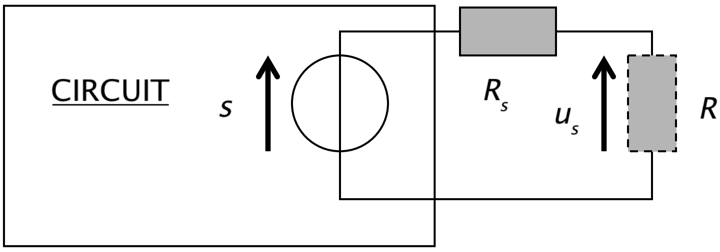
En revanche, le tension aux bornes du dipôle peut devenir très différente de la tension à vide du générateur, elle n'en est que la moitié en cas d'égalité et peut devenir très inférieur $u_e \ll e$ lorsque $R_e \ll R_g$.

4.2 Maille de sortie

Le circuit se comporte couramment comme un générateur linéaire, pour ce qui concerne la sortie. On peut alors le modéliser à l'aide d'une source de tension de valeur caractéristique s et d'une résistance interne R_s dite **résistance de sortie**. Lorsqu'un dipôle linéaire de résistance R est connecté entre les bornes de sortie du circuit, un diviseur de tension apparaît. La relation entre s et la tension u_s apparaissant en sortie est alors :

$$\boxed{u_s = s\frac{R}{R_s + R}}$$

La tension u_s est donc inférieure à la tension à vide de l'opérateur. On ne peut les considérer voisine que si: $R \gg R_s$: $u_s \simeq s$.



Connecter un dipôle résistif en sortie d'un opérateur met un jeu un diviseur potentiométrique : la tension observée n'est voisine de la tension à vide que si la résistance connectée est très supérieure à la résistance de sortie de l'opérateur.

Exercice d'application 2

Application au cas de la mesure

L'entrée d'un oscilloscope est décrite par sa résistance d'entrée R_e, couramment égale à $1\,\mathrm{M}\Omega$.

a) On connecte un générateur de résistance interne $R_g = 50\,\Omega$ sur l'entrée d'un oscilloscope. Quelle erreur relative commet-on en confondant la tension à vide e et la tension u_e mesurée sur l'écran ?

b) Un capteur électrochimique a une résistance interne égale à $500\,\mathrm{k}\Omega$, quelle erreur relative de mesure apparaît si on connecte directement l'oscilloscope sur le capteur ?

c) On place entre le capteur et l'oscilloscope un adaptateur, qui a pour effet de présenter une résistance d'entrée de $10\,\mathrm{M}\Omega$ au capteur. Que devient l'erreur relative précédente ?

Répétiteur vidéo

Dans le domaine de la transmission de signaux vidéo, porteurs d'information d'images, la norme impose d'utiliser des résistances d'entrée et de sortie égales à $75\,\Omega$. C'est à cette condition que l'amplitude crête à crête des signaux a la valeur nominale de 1 V.

On considère un répétiteur, qui est un opérateur censé reproduire en parallèle sur plusieurs sorties un signal identique à celui qu'il reçoit. Pour chacune des sorties (on parle de voies), le schéma équivalent est composé d'une source de tension de valeur s et d'une résistance interne égale à $75\,\Omega$.

a) Proposer un schéma électrique équivalent à la maille de sortie d'un répétiteur connecté à un appareil de résistance d'entrée $75\,\Omega$.

b) En déduire la valeur donnée à s, si le signal que l'on veut voir transiter par le répétiteur a pour valeur v.

c) Pour tester le bon fonctionnement d'une des voies du répétiteur, on débranche la sortie correspondante et on connecte un oscilloscope. Quelle précaution faut-il respecter ?

Annexe A : Classification des dipôles

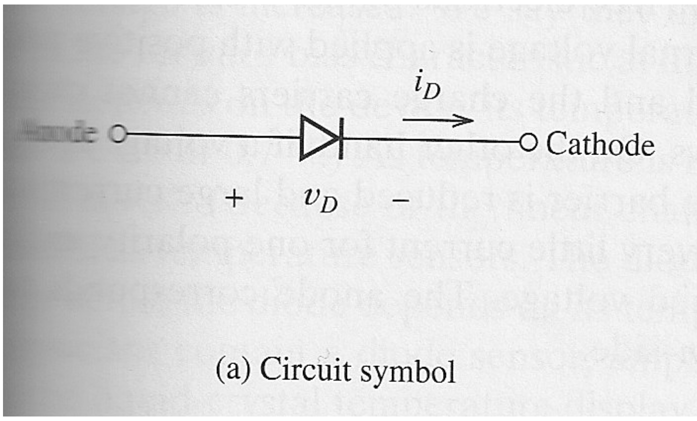
✔ Dipôle actif ou passif

L'examen de la caractéristique d'un dipôle permet une première classification. Ainsi, **un dipôle est passif** si sa caractéristique passe par l'origine (intensité nulle à tension nulle). Il est actif dans le cas contraire. Un **dipôle actif** nécessite une source externe d'alimentation en énergie. Une résistance, un condensateur et une bobine sont des dipôles passifs. Un amplificateur opérationnel (AO), un composant à base de transistors (eux même à base de semi-conducteurs), est un dipôle actif.

✔ Dipôle linéaire ou non linéaire

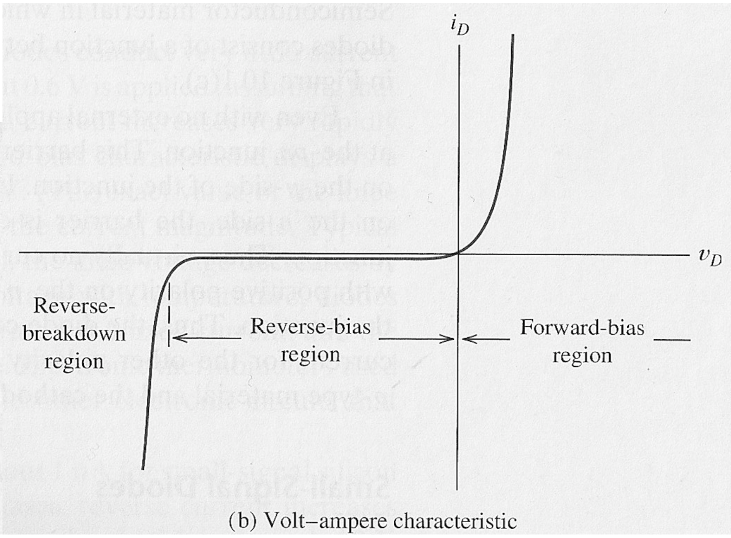
Un autre mode de classement des dipôles est le critère de linéarité : on parle de **dipôle linéaire** lorsque la caractéristique $i = f\left(u\right)$ est affine ou si la relation qui relie $u\left(t\right)$ et $i\left(t\right)$ est une équation différentielle à coefficients constants. Une pile électrochimique, une résistance, une bobine, un condensateur sont des dipôles linéaire. Un composant très utilisé en électronique, la diode, un composant à semi-conducteur, est un **dipôle non linéaire** (cf. figure ci-dessous).

Symbole de la diode (dipôle passif non linéaire)



(a) Circuit symbol

Caractéristique de la diode



(b) Volt–ampere characteristic

Chaque composant réel peut être modélisé grâce à une caractéristique $i = f\left(u\right)$ et il n'est pas indispensable de connaître le fonctionnement ou la structure physique interne d'un composant pour en étudier son comportement électrique lorsque on l'insère dans un circuit. En effet, la donnée de la caractéristique suffit à déterminer ce comportement vis-à-vis des autres éléments du circuit. Dans le cas de la diode à semi-conducteurs par exemple, il n'est pas nécessaire d'avoir étudié la physique du solide, qui est en jeu dans les phénomènes se déroulant à l'intérieur de la diode, pour étudier des applications mettant en œuvre ce composant.

Caractéristique de la diode idéale : modèle simplifié

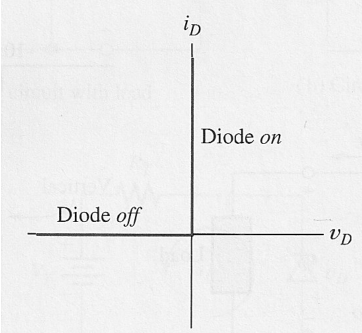


Figure 10.15 Ideal-diode volt–ampere characteristic.

Annexe B

Caractéristiques principales des dipôles élémentaires passifs (Convention récepteur)			
Relation	Résistance (R)	Condensateur (C)	Inductance (L)
$u-i$	$u = Ri$	$u(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt + u(t_0)$	$u = L\frac{di}{dt}$
$i-u$	$i = u/R$	$i = C\frac{du}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u\,dt + i(t_0)$
P ou E	$P = Ri^2 = u^2/R$	$E_C = \frac{1}{2}Cu^2$	$E_L = \frac{1}{2}Li^2$
Association série (pour 2)	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ ou $C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$	$L_{eq} = L_1 + L_2$
Association parallèle (pour 2)	$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ou $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$C_{eq} = C_1 + C_2$	$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$ ou $L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$
En régime continu (DC)	Identique	Interrupteur ouvert	Interrupteur fermé (court-circuit)
Variable qui ne peut pas subir de discontinuité	Ne s'applique pas	u	i