

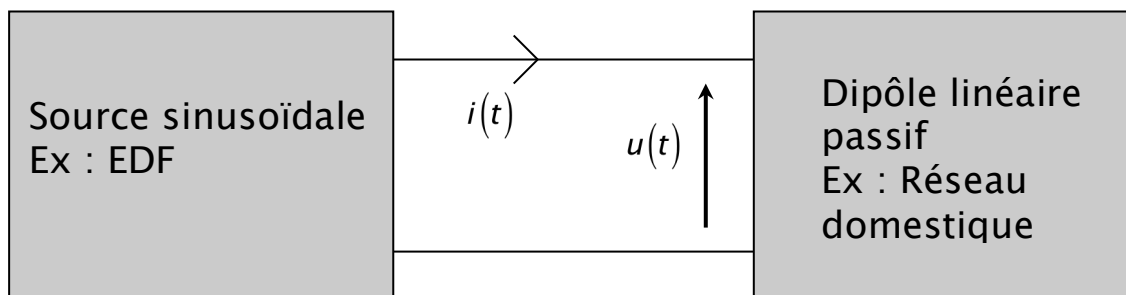
P U I S S A N C E E N R E G I M E S I N U S O I D A L

« L'argent est l'argent, quelles que soient les mains où il se trouve. C'est la seule puissance qu'on ne discute jamais »

Alexandre Dumas

I – Puissance instantanée

On se place dans ce chapitre en **convention récepteur**.



Nous allons nous intéresser à la puissance transmise par une source sinusoïdale d'énergie, typiquement le réseau EDF, à un dipôle linéaire passif consommateur d'énergie, typiquement le réseau électrique d'une maison. Il s'agit donc d'une étude importante.

On a déjà vu l'expression de la puissance instantanée qui s'exprime en $W = J.s^{-1}$:

Puissance instantanée: $p(t) = u(t)i(t)$

D'une façon générale, l'intensité qui traverse le dipôle passif et la tension aux bornes de ce dernier sont données par :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

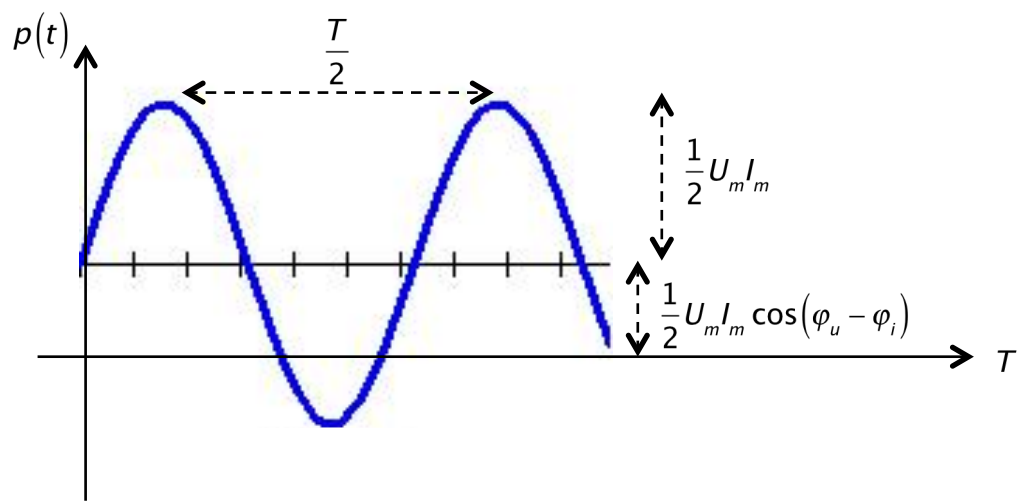
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Calculons l'expression générale de $p(t)$:

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

En utilisant l'identité trigonométrique $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$, on arrive au résultat suivant :

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i) + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$



On constate que la puissance instantanée oscille avec une période qui vaut la moitié de la période commune à $u(t)$ et $i(t)$.

II – Puissance moyenne

2.1 Expression 1 : La plus connue et utile

Cette grandeur présente d'un point de vue pratique plus d'intérêt que la puissance instantanée car les instruments de mesure sont sensibles à la puissance moyenne. EDF facture la puissance moyenne que vous consommez. Donnons la définition de cette puissance moyenne qui s'exprime en $W = J.s^{-1}$:

$$\text{Puissance moyenne: } P \equiv \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt$$

On obtiendrait le même résultat si l'on calculait l'intégrale sur $T/2$ (la période de $p(t)$). Mais il est d'usage, et plus commode, de travailler sur T puisqu'il s'agit de la période de $u(t)$ et $i(t)$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i) + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \right] dt \\ &= \frac{1}{2T} U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i) \int_0^T dt + \frac{1}{2T} U_m I_m \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) dt \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i) + \underbrace{\frac{1}{2T} U_m I_m \left[\frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \right]_0^T}_{=0 \text{ car } T=2\pi/\omega} \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

Il s'agit d'une expression très importante à bien comprendre.

Remarques et commentaires :

- Pour P , on parle souvent de **puissance active consommée**.
- Le terme $\frac{1}{2}U_m I_m$ est appelé **la puissance apparente**.
- $\cos(\varphi_u - \varphi_i)$ est le **FACTEUR DE PUISSANCE**, il joue un rôle très important dans la consommation des installations électriques. Ainsi le déphasage entre la tension et l'intensité, $\varphi_u - \varphi_i$, est primordial. P est maximale si $\cos(\varphi_u - \varphi_i) = 1$
- P est maximale si $\cos(\varphi_u - \varphi_i) = 1$ donc si $\varphi_u - \varphi_i = 0$, la tension et l'intensité sont alors en phase. EDF souhaite que les installations domestiques possèdent un facteur de qualité proche de 1 sinon il y a perte de puissance. Si $\cos(\varphi_u - \varphi_i) = 1$, l'installation est purement résistive. Dans la réalité, ce n'est jamais le cas, il y a toujours des effets inductifs et capacitifs. Par exemple, une machine à laver possède un aspect inductif du fait de la présence de moteurs électriques qui comprennent des bobines.

2.2 Expression 2 : Utilisation des amplitudes complexes

Il est possible de donner une expression équivalente à la puissance moyenne en utilisant la représentation complexe :

$$\begin{aligned}u(t) &= U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \leftrightarrow \underline{U} = U_m e^{j\varphi_u} \\i(t) &= I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \leftrightarrow \underline{I} = I_m e^{j\varphi_i} \\ \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U} \bar{\underline{I}}) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U_m e^{j\varphi_u} I_m e^{-j\varphi_i}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U_m I_m e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)\end{aligned}$$

On retiendra donc une deuxième façon d'exprimer la puissance moyenne :

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U} \bar{\underline{I}})$$

2.3 Expressions 3 et 4 : Utilisation de l'impédance complexe et de l'admittance complexe

On appelle **impédance de charge**, notée $\underline{Z}_C = R_C + jX_C$, l'impédance correspondant au dipôle passif linéaire. De même, on appelle **admittance de charge**, notée $\underline{Y}_C = G_C + jB_C$, l'admittance correspondant au dipôle passif linéaire avec $\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}$. Ainsi $\underline{U} = \underline{Z}_C \underline{I}$ ou $\underline{I} = \underline{Y}_C \underline{U}$.

Cela nous conduit à deux autres expressions de la puissance moyenne :

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U} \bar{\underline{I}}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_C \underline{I} \bar{\underline{I}}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_C |\underline{I}|^2) = \frac{1}{2} |\underline{I}|^2 \operatorname{Re}(\underline{Z}_C) \Rightarrow P = \frac{1}{2} |\underline{I}|^2 R_C$$

De façon analogue :

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U} \bar{I}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U} \overline{Y_C U}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\overline{Y_C} |\underline{U}|^2) = \frac{1}{2} |\underline{U}|^2 \operatorname{Re}(\overline{Y_C}) \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2} |\underline{U}|^2 G_C}$$

2.4 Puissance moyenne : Bilan des différentes expressions

$$P \equiv \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \leftrightarrow \underline{U} = U_m e^{j\varphi_u}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \leftrightarrow \underline{I} = I_m e^{j\varphi_i}$$

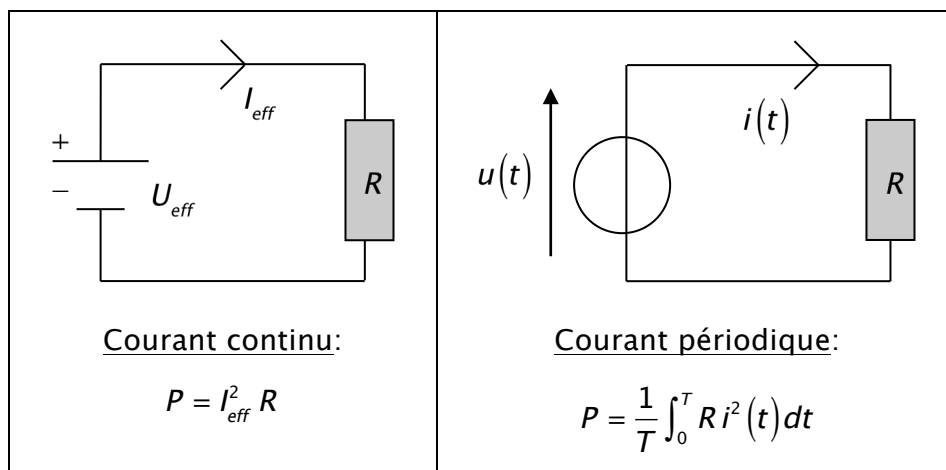
$$\underline{Z_C} = R_C + jX_C, \underline{Y_C} = G_C + jB_C, \underline{Y_C} = \frac{1}{\underline{Z_C}}, \underline{U} = \underline{Z_C} \underline{I}, \underline{I} = \underline{Y_C} \underline{U}$$

$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)$	$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{U} \bar{I})$	$P = \frac{1}{2} \underline{I} ^2 R_C$	$P = \frac{1}{2} \underline{U} ^2 G_C$
---	--	---	---

III - Valeurs efficaces (RMS en anglais)

3.1 Expression générale pour des signaux périodiques

Par définition, la **valeur efficace d'un courant périodique**, notée I_{eff} (ou I_{RMS} en anglais), est le courant continu qui produirait la **même puissance moyenne** à travers une résistance qu'en régime périodique quelconque.



Pour que les deux puissances soient identiques, il faut que :

$$\boxed{I_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}}$$

On aboutit à la définition mathématique de l'intensité efficace pour une intensité périodique. On peut, par analogie, définir la tension efficace d'une tension périodique par :

$$U_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

D'un point de vue mathématique, on peut définir la valeur efficace (RMS) d'un signal périodique

$$x(t) \text{ de période } T \text{ par } X_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}.$$

3.2 Cas particulier et très important des fonctions périodiques sinusoïdales

$$\text{Si } i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \text{ alors } I_{eff} \equiv \frac{I_m}{\sqrt{T}} \sqrt{\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{T}} \sqrt{\int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

On retiendra les résultats suivants :

$$\left. \begin{aligned} I_{eff} &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \\ U_{eff} &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \text{ pour des signaux sinusoïdaux}$$

On peut donc écrire pour la puissance moyenne :

$$P = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$



Dans la pratique, pour les électriciens professionnels (artisans, techniciens, ingénieurs...), il s'agit sans doute de la relation donnant la puissance moyenne la plus utilisée.

IV - Aspect énergétique des dipôles R, L et C en régime sinusoïdal

4.1 Résistance

- $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase $\Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$.
- $p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + 2\varphi_u) \Rightarrow 0 \leq p(t) \leq 2 U_{eff} I_{eff}$. $p(t) \geq 0 \forall t$, la résistance consomme (absorbe) toujours de la puissance.
- $P = U_{eff} I_{eff}$.

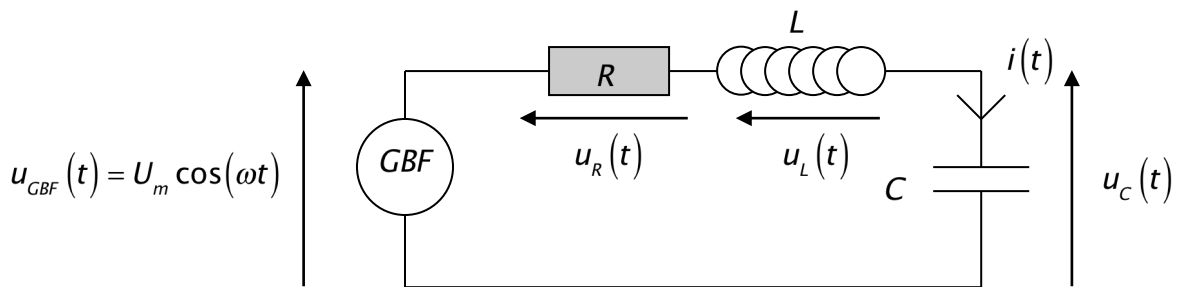
4.2 Condensateur

- $i(t)$ est en avance de $\pi/2$ sur $u(t) \Rightarrow \varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$.
- $p(t) = -U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(2\omega t + 2\varphi_u) \Rightarrow -U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \leq p(t) \leq U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$. Pendant $T/2$, le condensateur se comporte comme un générateur $p(t) \leq 0$ et pendant $T/2$, le condensateur se comporte comme un récepteur $p(t) \geq 0$.
- $P = 0$.

4.3 Bobine

- $u(t)$ est en avance de $\pi/2$ sur $i(t) \Rightarrow \varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$.
- $p(t) = -U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(2\omega t + 2\varphi_i) \Rightarrow -U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \leq p(t) \leq U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$. Pendant $T/2$, la bobine se comporte comme un générateur $p(t) \leq 0$ et pendant $T/2$, la bobine se comporte comme un récepteur $p(t) \geq 0$. Quand la bobine est un récepteur, le condensateur est un générateur et inversement.
- $P = 0$.

4.4 Puissance moyenne d'un groupement RLC série



La loi des mailles donne : $u_{GBF}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t)$. On multiplie cette équation membre à membre par $i(t)$ (on a déjà utilisé une approche similaire pour les oscillateurs mécaniques en régime libre et on fera de même pour les oscillateurs mécaniques en régime forcé). On obtient :

$$u_{GBF}(t)i(t) = Ri^2(t) + L \frac{di(t)}{dt} i(t) + \frac{1}{C} q(t) \frac{dq(t)}{dt}$$

On fait alors apparaître un **bilan de puissance** :

$$\underbrace{p_{GBF}(t)}_{\text{Puissance instantanée fournie par le GBF}} = \underbrace{Ri^2(t)}_{\text{Puissance instantanée absorbée par R}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2} Li^2(t)}_{E_L(t)} + \underbrace{\frac{1}{2C} q^2(t)}_{E_C(t)} \right]}_{\text{Puissance instantanée absorbée ou fournie par C et L}}$$

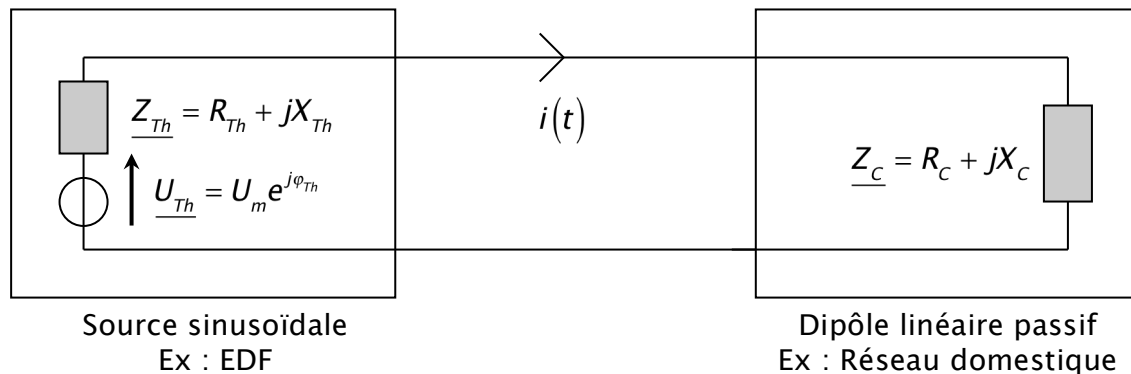
Si on fait une moyenne sur la période T :

$$P_{GBF} = \underbrace{\langle Ri^2(t) \rangle}_{=RI_{eff}^2} + \underbrace{\left\langle \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2} Li^2(t)}_{E_L(t)} + \underbrace{\frac{1}{2C} q^2(t)}_{E_C(t)} \right] \right\rangle}_{=0} \Rightarrow \boxed{P_{GBF} = RI_{eff}^2}$$

Le condensateur et la bobine ne participent pas au bilan énergétique en régime sinusoïdal forcé alors qu'ils jouent un rôle essentiel dans le bilan énergétique pendant le régime transitoire.

V - Adaptation d'impédance

Il s'agit d'un problème très général en sciences physiques : comment une source de puissance peut-elle transmettre le maximum de puissance à une charge ?



On suppose que l'on connaît $\underline{Z}_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$. On cherche alors $\underline{Z}_C = R_C + jX_C$ pour que la puissance transmise par la source à la charge soit maximale. Il faut donc déterminer R_C et X_C .

(Calculs au tableau)

