MESURES ET INCERTITUDES

«La connaissance progresse en intégrant en elle l'incertitude, non en l'exorcisant.»
Edgar Morin (1931-)

Ce document est un résumé des principaux résultats, sur l'étude et la prise en compte des incertitudes dans la mesure de grandeurs physiques. Ces résultats seront utilisés en classe à travers les TP et les TD. Aucune justification rigoureuse de ces derniers ne sera donnée (ce n'est pas de notre ressort). Pour cela, je vous renvoie à votre cours de probabilité en mathématiques ou aux ouvrages présentés dans la bibliographie et en note de bas de page.

I – POURQUOI LES INCERTITUDES EXISTENT-ELLES ?[1]

Le but de la majorité des expériences en physique consiste à comprendre un phénomène et à le modéliser correctement. Nous effectuons des mesures et nous avons souvent à nous poser la question: “ quelle est la valeur de telle ou telle grandeur ? ”, parfois sans nous demander préalablement si cette formulation est correcte et si nous serons capables de trouver une réponse.

La nécessité de cette interrogation préalable devient évidente dès qu'on mesure la même grandeur plusieurs fois. L'expérimentateur qui le fait est fréquemment confronté à une situation assez intéressante : s'il utilise des appareils suffisamment précis, il s'aperçoit que des mesures répétées de la même grandeur donnent parfois des résultats qui sont un peu différents de celui de la première mesure. Ce phénomène est général, que les mesures soient simples ou sophistiquées. Même les mesures répétées de la longueur d'une tige métallique peuvent donner des valeurs différentes. La répétition de l'expérience montre que, d'une part, les résultats sont toujours un peu différents et, d'autre part, cette différence n'est en général pas très grande. Dans la plupart des cas, on **reste proche d'une certaine valeur moyenne**, mais de temps en temps on trouve des valeurs qui sont différentes de celle-ci. Plus les résultats sont éloignés de cette moyenne, plus ils sont rares.

Pourquoi cette dispersion existe-t-elle ? D'où vient cette variation ? Une raison de cet effet est évidente : les conditions de **déroulement d'une expérience varient toujours légèrement**, ce qui modifie la grandeur mesurable. Par exemple, quand on détermine plusieurs fois la longueur d'une tige métallique, c'est la température ambiante qui peut varier et ainsi faire varier la longueur. Cette variation des conditions extérieures (et la variation correspondante de la valeur physique) peut être plus ou moins importante, mais elle est inévitable et, dans les conditions réelles d'une expérience physique, on ne peut pas s'en affranchir.

Nous sommes “condamnés” a effectuer des mesures de grandeurs qui ne sont presque jamais constantes. C'est pourquoi même la question de savoir quelle est la valeur d'un paramètre peut ne pas être absolument correcte. Il faut poser cette question de manière pertinente et trouver des moyens adéquats pour décrire les grandeurs physiques. Il faut trouver une définition qui puisse exprimer cette particularité physique. Cette définition doit refléter le fait que la valeur physique varie toujours, mais que ses **variations se regroupent autour d'une valeur moyenne**. La solution est de caractériser une grandeur physique non pas par une valeur, mais plutôt par la probabilité de trouver dans une expérience telle ou telle valeur. Pour cela on introduit une fonction appelée distribution de probabilité de détection d'une valeur physique, ou plus simplement la distribution d'une valeur physique, qui montre quelles sont les valeurs les plus fréquentes ou les plus rares. Il faut souligner une fois encore que, dans cette approche, il ne s'agit pas tellement de la valeur concrète d'une grandeur physique, mais surtout de la probabilité de trouver différentes valeurs.

[1] D'après Analyse statistique des données expérimentales de K.Protassov, chez EDP Sciences, 148 p, 2002

Dans la majorité des expériences cette fonction – **la distribution d'une valeur physique** – est heureusement suffisamment simple. Elle a deux caractéristiques :

$\Longrightarrow$ La première est sa **VALEUR MOYENNE** qui est aussi la valeur la plus probable.

$\Longrightarrow$ La deuxième caractéristique de cette fonction de distribution indique, grosso modo, la région autour de cette moyenne dans laquelle se regroupe la majorité des résultats des mesures. La largeur de cette distribution est appelée **l'INCERTITUDE**.

Le fait que, dans la plupart des expériences, le résultat puisse être caractérisé par seulement deux valeurs, permet de revenir sur la question avec laquelle nous avons commencé notre discussion : "Peut-on se demander quelle est la valeur d'un paramètre physique ?" Il se trouve que dans le cas où deux paramètres sont nécessaires et suffisants pour caractériser une grandeur physique, on peut réconcilier notre envie de poser cette question et la rigueur de l'interprétation d'un résultat en termes de probabilités.

La solution existe : ***On appellera valeur physique la valeur moyenne de la distribution et incertitude la valeur physique de la largeur de la distribution.***

Le but des mesures physiques est la détermination de cette fonction de distribution ou, au moins, de ses deux paramètres majeurs : la moyenne et la largeur. Pour déterminer une distribution on doit répéter plusieurs fois une mesure pour connaître la fréquence d'apparition des valeurs. Pour obtenir l'ensemble des valeurs possibles ainsi que leurs probabilités d'apparition, on devrait en fait effectuer un nombre infini de mesures. C'est très long, trop cher, et personne n'en a besoin.

On se limite donc à un nombre fini de mesures. Bien sûr cela introduit une erreur (incertitude) supplémentaire. Cette incertitude, due à l'impossibilité de mesurer avec une précision absolue la distribution initiale (naturelle), s'appelle **l'erreur statistique ou erreur accidentelle ou encore erreur aléatoire**. Il est assez facile, du moins en théorie, de diminuer cette erreur : il suffit d'augmenter le nombre de mesures. En principe, on peut la rendre négligeable devant l'incertitude initiale de la grandeur physique. Cependant un autre problème plus délicat apparaît.

Il est lié au fait que dans chaque expérience physique existe un appareil, plus ou moins compliqué, entre l'expérimentateur et l'objet mesurable. Cet appareil apporte inévitablement des modifications de la distribution initiale : il la déforme. Dans le cas le plus simple, ces changements peuvent être de deux types : l'appareil peut "décaler" la valeur moyenne et il peut élargir la distribution. Le décalage de la valeur moyenne est un exemple de ce qu'on appelle les "**erreurs systématiques**". Ce nom exprime que ces erreurs apparaissent dans chaque mesure. L'appareil donne systématiquement une valeur qui est différente (plus grande ou plus petite) de la valeur "réelle" Mesurer avec un appareil dont le zéro est mal réglé est l'exemple le plus fréquent de ce genre d'erreurs. Malheureusement, il est très difficile de combattre ce type d'erreurs, il est à la fois difficile de les déceler et de les corriger. Pour cela, il n'y a pas de méthodes générales et il faut étudier chaque cas.

Par contre, il est plus facile de maîtriser l'élargissement de la distribution introduit par l'appareil. On montre que cette incertitude a la même origine que les incertitudes initiales (naturelles) et s'ajoute "simplement" à celles-ci. Dans un grand nombre d'expériences, l'élargissement dû à l'appareil permet de simplifier les mesures : supposons que nous connaissions l'incertitude (la largeur) introduite par un appareil et que celle-ci soit nettement plus grande que l'incertitude initiale. Il est possible de négliger l'incertitude naturelle par rapport à l'incertitude d'appareillage. Il suffit donc de faire une seule mesure et de prendre l'incertitude de l'appareil comme incertitude de la mesure. Evidemment, dans ce genre d'expérience, il faut être sûr que l'incertitude de l'appareil domine l'incertitude naturelle, mais on peut toujours le vérifier en faisat des mesures répétitives. L'appareil peu précis ne permettra pas d'obtenir les variations dues a la largeur initiale.

Figure 1 : Rôles respectifs des erreurs aléatoires et systématiques.

On représente classiquement les rôles respectifs des erreurs aléatoires et systématiques par une analogie avec un tir sur cible (cf. figure 1), le centre de la cible représentant la valeur vraie de la grandeur à mesurer :
$\Rightarrow$ Si tous les impacts sont proches du centre : faibles erreurs aléatoires et faible erreur systématique.
$\Rightarrow$ Si les impacts sont très étalés, mais centrés en moyenne sur la cible : fortes erreurs aléatoires et faible erreur systématique.
$\Rightarrow$ Si les impacts sont groupés, mais loin du centre : faibles erreurs aléatoires et forte erreur systématique.
$\Rightarrow$ Si les impacts sont étalés et loin du centre : fortes erreurs aléatoires et forte erreur systématique.
Le défaut de cette analogie est qu'en général, dans les mesures physiques on ne connaît pas le centre de la cible ! Un exemple plus complexe: Si on mesure une distance avec une règle en métal souple, la flexion de la règle va introduire une erreur systématique (la distance lue est toujours trop grande) et aléatoire (la flexion de la règle est variable).

Nous avons compris que pour déterminer expérimentalement une valeur physique il est nécessaire (mais pas toujours suffisant) de trouver la moyenne (la valeur) et la largeur (l'incertitude). Sans la détermination de l'incertitude l'expérience n'est pas complète, on ne peut la comparer ni avec une théorie ni avec une autre expérience. Nous avons également vu que cette incertitude contient trois contributions possibles. La première est **l'incertitude naturelle** liée aux changements des conditions d'expérience ou à la nature-même des grandeurs (en mécanique quantique). La deuxième est **l'incertitude statistique ou aléatoire** due à l'impossibilité de mesurer précisément la distribution initiale. La troisième est **l'incertitude d'appareillage ou systématique** due à l'imperfection des outils de travail de l'expérimentateur.

II – Présentation d'un résultat expérimental

• *DEFINITION DE L'ERREUR*

Lors de la mesure d'une grandeur physique x, l'erreur est la différence entre la valeur mesurée[2] x et la valeur vraie X. La valeur vraie est en général inconnue (puisqu'on la cherche !).

• *FORME STANDARD DE LA PRESENTATION DE LA MESURE D'UNE GRANDEUR PHYSIQUE*

La mesure d'une grandeur physique x quelconque est notée sous la forme standard suivante :

$$\boxed{\text{mesure de la valeur } x = \bar{x} \pm \delta x}$$

où (voir la suite pour plus de détails) :

$$\bar{x} = \text{meilleure estimation de la valeur vraie } X \text{ de la grandeur physique } x$$

[2] Pour simplifier les notations, dans toute la suite on désigne par la même lettre x la grandeur physique et sa valeur mesurée.

et

$$\delta x = \text{incertitude type sur la mesure}$$

Cet énoncé indique notre confiance que la valeur vraie X (inconnue, c'est ce que l'on cherche) se trouve probablement dans l'intervalle (ou tout au moins à proximité) $\left[\bar{x}-\delta x, \bar{x}+\delta x\right]$.

• ***INCERTITUDE RELATIVE OU FRACTIONNAIRE***

Si la mesure de x est notée sous la forme $\bar{x} \pm \delta x$, l'incertitude relative s'écrit :

$$\boxed{\text{incertitude relative} \equiv \frac{\delta x}{\left|\bar{x}\right|}}$$

III – Propagation des incertitudes

Les lois sur la propagation des erreurs se réfèrent à une situation où l'on a mesuré certaines grandeurs, $x,\ldots,w$ avec les incertitudes correspondantes δx, …, δw et où l'on veut utiliser ces valeurs pour calculer une quantité q. Les incertitudes pour $x,\ldots,w$ se «propagent » au fur et à mesure des calculs pour produire une incertitude sur la valeur de q.

• ***SOMME ET DIFFERENCE*** : Si $q = x + \cdots + z - \left(u + \cdots + w\right)$ alors :

$$\delta q = \sqrt{\left(\delta x\right)^2 + \cdots + \left(\delta z\right)^2 + \left(\delta u\right)^2 + \cdots + \left(\delta w\right)^2}$$ (si les erreurs sont indépendantes et aléatoires) et

$$\delta q \le \delta x + \cdots + \delta z + \delta u + \cdots + \delta w$$ (toujours vrai)

• ***PRODUIT ET QUOTIENT*** : Si $q = \dfrac{x \times \cdots \times z}{u \times \cdots \times w}$ alors :

$$\frac{\delta q}{\left|\bar{q}\right|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\bar{x}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\delta z}{\bar{z}}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\bar{u}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\delta w}{\bar{w}}\right)^2}$$ (si les erreurs sont indépendantes et aléatoires) et

$$\frac{\delta q}{\left|\bar{q}\right|} \le \frac{\delta x}{\left|\bar{x}\right|} + \cdots + \frac{\delta z}{\left|\bar{z}\right|} + \frac{\delta u}{\left|\bar{u}\right|} + \cdots + \frac{\delta w}{\left|\bar{w}\right|}$$ (toujours vrai)

• ***GRANDEUR MESUREE MULTIPLIEE PAR UN NOMBRE EXACT*** : Si $q = B\,x$ (B est connu exactement) alors :

$$\delta q = \left|B\right| \delta x$$ ou de façon équivalente $$\frac{\delta q}{\left|\bar{q}\right|} = \frac{\delta x}{\left|\bar{x}\right|}$$

• ***GRANDEUR MESUREE ELEVEE A UNE PUISSANCE***: Si n est un nombre exact et $q = x^n$ alors :

$$\frac{\delta q}{\left|\bar{q}\right|} = \left|n\right| \frac{\delta x}{\left|\bar{x}\right|}$$

• ***INCERTITUDE POUR UNE FONCTION D'UNE VARIABLE*** : Si $q=q(x)$ fonction de x alors :

$$\delta q=\left|\frac{dq}{dx}\right|\delta x$$

• ***RELATION GENERALE POUR LA PROPAGATION DES ERREURS*** : Si $q=q(x,\cdots,z)$ fonction de $x,\cdots,z$ alors :

$$\delta q=\sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\delta x\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial q}{\partial z}\delta z\right)^2}$$ (si les erreurs sont indépendantes et aléatoires) et

$$\delta q\leq\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x+\cdots\left|\frac{\partial q}{\partial z}\right|\delta z$$ (toujours vrai)

VI – Evaluation des incertitudes par des méthodes statistiques (évaluation du type A)

On suppose que l'on a effectué N mesures $x_1,x_2,\cdots,x_N$ de la même grandeur x en utilisant les mêmes méthodes. On suppose que **toutes les incertitudes sont aléatoires et faibles.** On a les résultats suivants :

• ***VALEUR MOYENNE***

La meilleure estimation de la valeur vraie X, notée $\bar{x}$, obtenue à partir des N mesures $x_1,x_2,\cdots,x_N$ est la moyenne de ces mesures :

$$\boxed{\text{meilleure estimation de } X=\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}}$$

• ***ECART-TYPE (OU DEVIATION STANDARD)***

L'incertitude moyenne des mesures individuelles est donnée par l'écart-type :

$$\boxed{\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}}$$

La signification de σ_x est que 68 % des mesures de la grandeur physique x vont se trouver à une distance σ_x de part et d'autre de la valeur vraie X et 95 % des mesures vont se trouver à une distance $2\sigma_x$ de part et d'autre de la valeur vraie.

- ***ECART-TYPE (OU DEVIATION STANDARD) DE LA MOYENNE***

L'incertitude type sur notre meilleure estimation de la valeur vraie X, notée $\overline{x}$, est donné par :

$$\text{incertitude type sur } \overline{x} = \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

- ***RESUME***

En résumé, si on réalise N mesures de x, avec les résultats $x_1, x_2, \cdots, x_N$, on écrira le résultat final sous la forme :

$$x = \overline{x} \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

où $\overline{x}$ et $\sigma_x / \sqrt{N}$ sont les meilleures estimations de la valeur vraie et de l'incertitude type.

Remarques et compléments

– Si d'une façon ou d'une autre, vous arrivez à évaluer les incertitudes systématiques δx_{syst}, une expression raisonnable (mais pas justifiée de façon rigoureuse) pour l'incertitude totale δx est la somme quadratique de l'incertitude aléatoire $\delta x_{aléa} = \sigma_x / \sqrt{N}$ et de l'incertitude systématique δx_{syst} :

$$\delta x = \sqrt{\left(\delta x_{aléa}\right)^2 + \left(\delta x_{syst}\right)^2}$$

– Si l'on ne dispose pas du temps nécessaire pour faire une série de mesures afin d'évaluer les incertitudes par des méthodes statistiques (pour ce qui concerne les erreurs aléatoires), on estime δx à partir des spécifications des appareils de mesures et des conditions expérimentales. **On parle alors d'évaluation de type B de l'incertitude.**

V– BIBLIOGRAPHIE

– An introduction to Error Analysis, The study of uncertainties in physical measurements 2/E par John R. Taylor aux éditions University Science Books, 1997, 327 p.

La référence (et ma référence) pour une introduction au sujet, il existe une traduction française de la première édition.

– Incertitudes expérimentales par François-Xavier Bally et Jean-Marc Berroir dans le BUP n°928, Vol 102, Novembre 2010, p. 995-1019.