Ouverture au monde quantique

Exercice 1 : Neutron dans le noyau : modèle de la boîte à 1D

a) Déterminer l'énergie de l'état fondamental $(n=1)$ et des deux premiers états excités d'un neutron dans une boîte unidimensionnelle de longueur $\ell = 1{,}00 \times 10^{-15}\ \mathrm{m} = 1{,}00\ \mathrm{fm}$ (environ la taille du noyau de l'atome). Dessiner le diagramme des niveaux d'énergie pour ce système.
b) Calculer la longueur d'onde des ondes électromagnétiques émises quand un neutron réalise les transitions suivantes : $n=2 \to n=1$, $n=3 \to n=2$, $n=3 \to n=1$

Exercice 2 : Inégalité d'Heisenberg énergie-temps

a) Un électron dans l'état $n=2$ de l'atome d'hydrogène reste en moyenne 10^{-8} s avant de « sauter » dans l'état $n=1$. Estimer l'indétermination sur l'énergie de l'état $n=2$.
b) A quelle fraction de l'énergie de transition $n=2 \to n=1$ cela correspond t-il ? Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par $E_n = \dfrac{-|E_1|}{n^2}$ avec $|E_1| = 13.6\ \mathrm{eV}$.
c) Quelles sont la longueur d'onde et son indétermination en nm de cette raie d'émission du spectre de l'hydrogène ?

Exercice 3 : Inégalité d'Heisenberg position-quantité de mouvement

Un électron et une balle de baseball de 140 g voyagent tous les deux à une vitesse de $95\ \mathrm{m.s^{-1}}$ mesurée avec une précision de 0,085 %. Calculer l'indétermination sur la position de l'électron et sur celle de la balle et comparer les résultats.

Exercice 4 : La longueur de Planck

Le principe d'indétermination (on dit aussi d'incertitude) d'Heisenberg s'applique aux particules « matérielles » mais aussi aux photons. Ainsi un photon confiné dans une « boîte » de très faible dimension Δx possède une grande indétermination sur la valeur de sa quantité de mouvement et donc de son énergie (car pour un photon $E = pc$) et donc une large énergie moyenne. Comme la masse est une forme d'énergie d'après $E = mc^2$, un photon confiné peut donc provoquer un champ gravitationnel très intense. Si Δx est suffisant faible, la densité d'énergie (énergie par unité de volume) peut-être suffisante pour créer un trou noir. Dans ce cas, la dimension Δx est appelée ***la longueur de Planck*** et définie l'échelle à laquelle la gravitation et la physique quantique sont inextricablement mixées. (Une branche de la physique qui tente de combiner la relativité générale et la physique quantique est appelée la théorie des cordes)

a) Montrer que la vitesse d'échappement d'une étoile de masse M et de rayon R est $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$.

b) Grâce à l'expression de v_e d'un trou noir à la vitesse de la lumière, déterminer une expression pour la longueur de Planck en fonction de c, G et $\hbar$.

c) Montrer que cette longueur est fantastiquement faible, de l'ordre de 10^{-35} m.

d) Quel est le diamètre d'un proton (environ 2×10^{-15} m) en terme de longueur de Planck ?

Exercice 5 : Valeur moyenne et lien physique classique-physique quantique (exercice délicat !)

a) Dans un monde uniquement gouverné par la physique classique, la distribution de probabilité pour une particule dans une boîte suivant x dans la région $0 \le x \le \ell$ est donnée par $P(x) = 1/\ell$.

Utiliser ce résultat pour montrer que $\langle x \rangle = \frac{1}{2}\ell$ et $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3}\ell^2$ où $\langle x \rangle$ est la valeur moyenne sur la position et $\langle x^2 \rangle$ la valeur moyenne de la position au carré.

b) On considère toujours une particule dans une boîte suivant x dans la région $0 \le x \le \ell$ mais gouvernée par la physique quantique. La fonction d'onde pour cette particule est donnée par :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La valeur moyenne sur la position est donnée par $\boxed{\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi^2(x) dx}$ et celle sur le carré de la position par $\boxed{\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi^2(x) dx}$.

Pour une particule dans l'état quantique n, calculer $\langle x \rangle$ et $\langle x^2 \rangle$.

c) Dans le cas où $n \gg 1$ comparer les résultats précédents aux résultats classiques de la question a). Conclure.