

# CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

« La philosophie est écrite dans ce vaste livre constamment ouvert devant nos yeux (je veux dire l'univers), et on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Or il est écrit en langue mathématique, et ses caractères sont le triangle et le cercle et autres figures géométriques, sans lesquelles il est humainement impossible d'en comprendre un mot » Galilée

## I – INTRODUCTION

La **cinématique** s'intéresse à la description du mouvement d'un corps physique indépendamment de ses causes, alors que la dynamique (objet du prochain chapitre), le pilier de la mécanique, a pour objet l'étude des **causes de la modification du mouvement**. Pour résumer, on peut noter :

Mécanique = Cinématique + Dynamique

Dans le cours de sciences physiques de PTSI, le seul objet étudié sera le **point matériel ou particule**. Un point matériel est un **modèle commode** pour représenter un corps physique réel. Ce modèle est valable si les dimensions du corps physique sont faibles par rapport à la distance d'observation (de celui qui observe le mouvement). Par exemple, la navette spatiale peut-être assimilée à un point matériel pour un observateur terrestre mais pas pour son commandant de bord. En effet pour ce dernier, la navette a des dimensions spatiales, elle peut tourner sur elle-même etc... (cf. cours de mécanique du solide en sciences de l'ingénieur).

Décrivons de façon plus précise un point matériel :

- Il s'agit d'un objet **sans dimension, sans forme** (un point au sens des mathématiques).
- Le mouvement d'un point matériel se déroule dans l'espace et dans le temps. La connaissance de ce mouvement nécessite la connaissance de **trois coordonnées** ( $x, y, z$  ou  $r, \theta, z$  ...) dépendant du **paramètre temps**.
- Un point matériel est caractérisé par sa **masse** notée  $m$ . Il s'agit d'une grandeur scalaire (un nombre pur) dont l'unité est le kilogramme (kg). La masse est une grandeur invariante dans le temps et ne dépend pas du référentiel d'étude.

## II – LA MECANIQUE CLASSIQUE ET SA PLACE DANS LA PHYSIQUE

### 2.1 Rapide historique

⇒ XVII<sup>ème</sup> Siècle

- Galilée, introduction de la notion de vitesse et du mouvement uniformément accéléré en termes précis. Utilisation du langage mathématiques pour décrire la nature.

• 1687 : Newton publie « Les principes mathématiques de la philosophie naturelle », fondement de la mécanique classique, notions de force, d'accélération, de gravitation etc...

⇒ Début du XX<sup>ème</sup> siècle

• 1905 : Einstein publie la théorie de la relativité restreinte (sans oublier les travaux précurseurs de Poincaré et Lorentz). C'est la remise en cause de la mécanique de Newton (la vitesse de la lumière est constante, le temps n'est plus absolu, concept d'espace-temps...).

• 1916 : Einstein publie la théorie de la relativité générale. Les objets massifs déforment l'espace-temps, explication géométrique de la gravité.

⇒ De 1900 à 1930

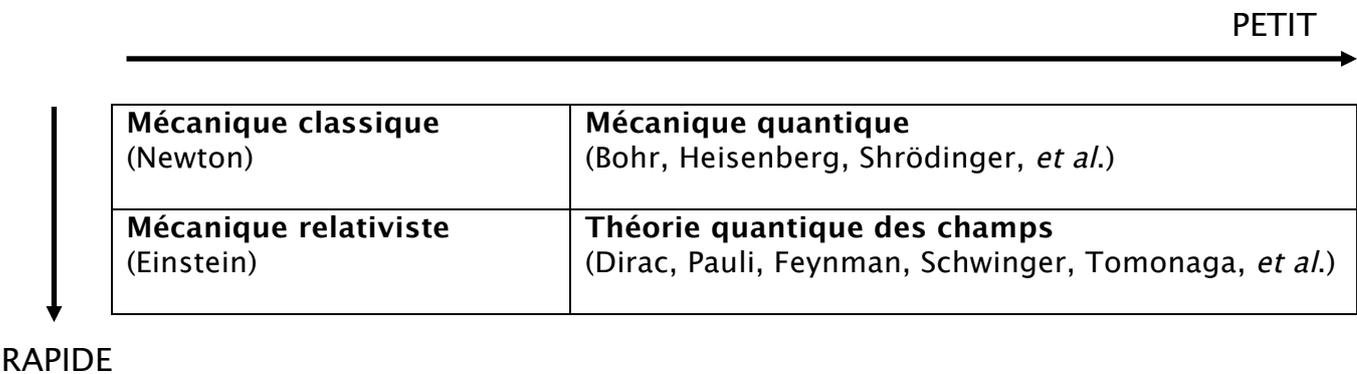
Elaboration de la mécanique quantique (Shrödinger, Heisenberg, Bohr, De Broglie), remise en cause de la notion de vitesse et de position, description des particules en termes de probabilité de présence.

⇒ De 1930 à 1950

Elaboration d'une mécanique quantique et relativiste (Dirac, Pauli, Feynman, Schwinger, Tomonaga).

## 2.2 Les types de mécanique

Les propos qui suivent sont adaptés de l'introduction du livre Introduction to Electrodynamics par David J. Griffiths, 3<sup>ème</sup> édition, chez Pearson Addison-Wesley, 1999. C'est un livre que je vous recommande fortement si vous devez approfondir l'étude de l'électromagnétisme après votre CPGE. Le tableau ci-dessous illustre **les quatre « royaumes » de la mécanique**.



La mécanique classique (ou mécanique Newtonienne) s'est révélée incomplète au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Elle fonctionne très bien pour décrire les phénomènes de la vie « quotidienne » mais pour des objets à très grande vitesse (proche de celle de la lumière), elle est incorrecte et doit être remplacée par **la mécanique relativiste** (restreinte et/ou générale). Pour des objets extrêmement petits, elle ne fonctionne pas non plus (pour diverses raisons) et doit être remplacée par **la mécanique quantique**. Pour décrire des objets à la fois rapides et petits (comme c'est le cas dans l'étude des particules élémentaires), il faut une mécanique à la fois relativiste et quantique : c'est la mécanique quantique relativiste ou, de façon plus correcte, **la théorie quantique des champs** (élaborée dans les années 1930-50). Même cette dernière mécanique n'est pas complètement satisfaisante à

l'heure actuellement (les expériences qui auront lieu au CERN, grâce au LHC, dans les prochaines décennies, permettront sans doute de compléter les choses).

En CPGE, nous n'étudierons que la mécanique classique même si nous parlerons un peu de physique quantique dans le cours sur l'architecture de la matière en chimie.

### 2.3 Quatre forces fondamentales

La mécanique nous informe de la façon dont va se comporter un système quand ce dernier est soumis à une force. Dans la nature, nous connaissons (actuellement) **seulement quatre forces fondamentales** (on parle aussi d'interactions) :

- 1- Forte
- 2- Electromagnétique
- 3- Faible
- 4- Gravitationnelle

La brièveté de cette liste peut surprendre ? qu'en est-il des forces de friction ? De la force qui nous maintient au sol ? Des forces chimiques qui lient les molécules entre elles ? Toutes ces forces ont pour origine une des quatre forces précédentes. En fait, dans la vie de tous les jours, à l'exception notable de la gravité qui nous cloue au sol, toutes les forces que nous rencontrons sont d'origine **électromagnétique** (nous en reparlerons dans le cours d'électromagnétisme). **La force forte** qui lie les protons et les neutrons ensemble dans le noyau atomique est à très faible portée et nous ne la ressentons pas, même si elle est une centaine de fois plus intense que la force électromagnétique. **La force faible** est responsable de certains processus radioactifs dans les noyaux. Elle n'est pas seulement à courte portée, elle est aussi beaucoup plus faible que l'interaction électromagnétique. Enfin, la force de gravité est de loin la plus faible de toutes et c'est seulement à cause de concentrations énormes de masses (comme la terre, le soleil) que nous percevons ses effets. La force de répulsion électrostatique entre deux électrons est  $10^{42}$  fois plus intense que la force d'attraction gravitationnelle. Si les atomes étaient liés par la force de gravité et non par la force électromagnétique, un simple atome d'hydrogène serait plus large que l'univers connu !

Il faut bien faire la distinction entre, d'une part, **un type de mécanique** et, d'autre part, **une loi de force particulière**. Par exemple, la loi universelle de la gravitation de Newton décrit une force particulière, la gravité, alors que les trois lois de Newton définissent une mécanique particulière, la mécanique classique qui gouverne (dans son domaine de validité) toutes les forces. Une loi de force nous dit ce que vaut  $\vec{F}$ , une mécanique nous dit comment utiliser  $\vec{F}$  pour déterminer le mouvement des particules.

En CPGE, vous allez travailler dans le cadre de la mécanique classique et rencontrer deux forces fondamentales : la gravité (loi universelle de la gravitation de Newton) et la force électromagnétique gouvernée par les quatre équations de Maxwell. Il existe une loi de force électromagnétique dans le

cadre de la théorie quantique des champs, on parle d'électrodynamique quantique. Il s'agit de la théorie la plus précise que l'on possède à l'heure actuelle en termes d'accord entre les mesures expérimentales et les prédictions théoriques. Il n'existe toujours pas de loi complètement satisfaisante pour la gravité dans le cadre de la théorie quantique des champs. Par contre, la force forte et la force faible ont été dès le départ élaborées dans le cadre de la théorie quantique des champs (elles n'existent pas dans le cadre de la mécanique classique).

Le but des physiciens est de trouver une loi de force unique capable de décrire les quatre forces en une seule et ceci dans le cadre d'une mécanique unique. Actuellement, c'est la **théorie des cordes** qui semble la plus prometteuse pour atteindre ce but mais la route est encore longue et difficile (il y a du travail pour de futurs physiciens). Il faut noter que dans les années 1960, la force faible et la force électromagnétique ont été unifiées (Glashow, Weinberg, Salam). Ces deux forces sont deux facettes d'une seule force, **la force électrofaible**. Cette unification a été parfaitement vérifiée expérimentalement dans les années 1980-90 auprès des accélérateurs de particule comme le LEP au CERN.

### **III – REPERE D'ESPACE ET REFERENTIEL**

#### **3.1 Repère d'espace**

On appelle **repère d'espace** un ensemble de points dont les distances sont invariables au cours du temps. Un tel ensemble est aussi appelé un solide de référence. Par exemple une table, un bateau, la terre peuvent servir de repère d'espace.

#### **3.2 Système de coordonnées**

On exprime la position d'un objet par rapport à un système de coordonnées qui est constitué d'un **ensemble de trois axes** dont chacun correspond à une **direction de l'espace** et qui est considéré comme **fixe** par rapport à un repère d'espace. On dit que le système de coordonnées est lié au repère. Dans la suite, nous allons utiliser les systèmes de coordonnées suivants :

⇒ Cartésien

⇒ Polaire (cylindrique à 2D)

⇒ Cylindrique

⇒ Sphérique (plus tard)

#### **3.3 Référentiel**

Un ensemble formé d'un repère d'espace et d'un repère de temps (un ensemble d'horloges synchronisées) constitue un **référentiel**, c'est-à-dire une référence spatiale et une référence temporelle, toutes deux indispensables dans l'étude de tout mouvement.

**Référentiel = Repère d'espace + Repère de temps**

## IV- MOUVEMENT DANS L'ESPACE

Dans la suite, on travaille dans un certain référentiel  $\mathcal{R}$  qu'il n'est pas nécessaire pour l'instant de préciser. Mais pour fixer les idées, nous pouvons travailler dans le référentiel dit du laboratoire constitué du bâtiment de physique du lycée auquel nous attachons trois axes fixes (par exemple orthonormés) et muni d'une horloge.

Dans cette partie, nous allons définir le vecteur **position**, le vecteur **vitesse** et le vecteur **accélération**. Un vecteur est un objet mathématique dont l'existence est indépendante du système de coordonnées utilisées. Mais pour débiter, après avoir défini de façon intrinsèque ces vecteurs (c'est-à-dire de façon indépendante du système de coordonnées utilisé), nous les exprimerons d'abord en coordonnées cartésiennes. Ensuite seulement, nous exprimerons ces vecteurs en coordonnées polaires puis en coordonnées cylindriques.

### 4.1 Le vecteur position

La position dans l'espace d'un point matériel est indiquée par le **vecteur position**  $\vec{r}(t) \equiv \overrightarrow{OP}(t)$  où  $O$  est un point fixe quelconque du référentiel d'étude et  $P(t)$  la position du point matériel à l'instant  $t$  considéré.

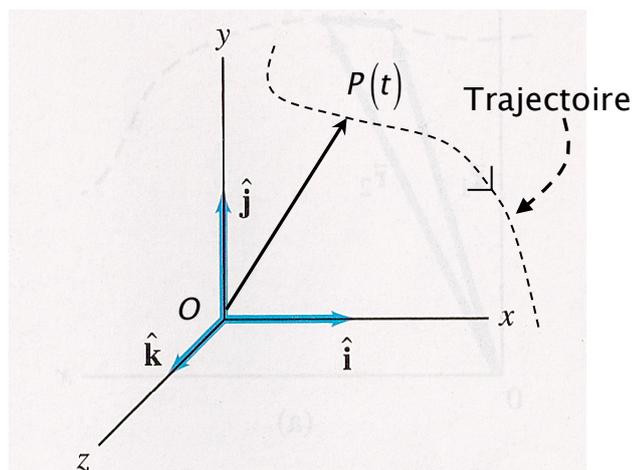
$$\text{Vecteur position : } \vec{r}(t) \equiv \overrightarrow{OP}(t)$$

En coordonnées cartésiennes, dans la base orthonormée  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  avec  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  des vecteurs unitaires fixes dans le temps (cf figure ci-contre), le vecteur position s'exprime de la façon suivante :

Vecteur position en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{r}(t) \equiv x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



**FIGURE 3-15** Unit vectors  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , and  $\hat{k}$  along the  $x$ ,  $y$ , and  $z$  axes.

## 4.2 Le vecteur déplacement

Soit  $P_1$  la position du point matériel à l'instant  $t_1$  et  $P_2$  sa position à l'instant  $t_2$  (cf figure ci-contre). Le **vecteur déplacement** est défini par :

$$\text{Vecteur déplacement : } \Delta \vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

ou  $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}(t_2)$  et  $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}(t_1)$ .

Dans le cours de sciences physiques, le symbole  $\Delta$  indique toujours la variation d'une grandeur physique quelconque  $X$  entre deux valeurs :

$$\Delta X = X_2 - X_1$$

En coordonnées cartésiennes, nous obtenons :

Vecteur déplacement en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta \vec{r} \equiv (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

## 4.3 Le vecteur vitesse moyen et le vecteur vitesse instantané

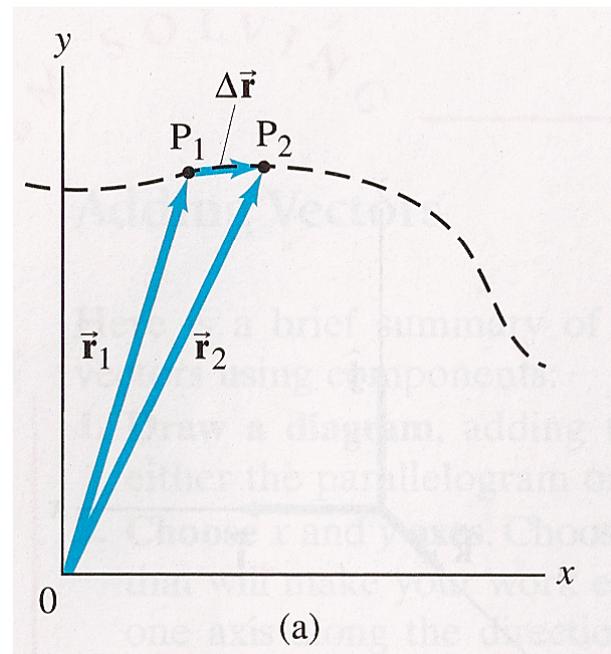
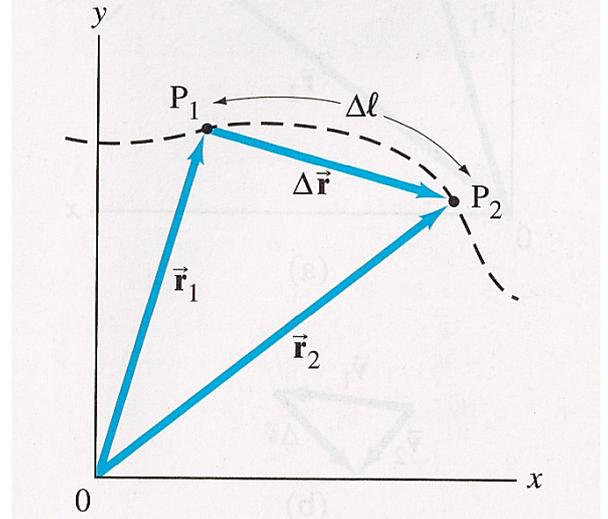
Pendant l'intervalle de temps  $\Delta t = t_2 - t_1$ , le vecteur vitesse moyen est défini par (cf figures ci-dessous):

$$\text{Vecteur vitesse moyen : } \vec{v}_{\text{moy}} \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

On considère à présent des intervalles de temps  $\Delta t$  de plus en plus courts. Ainsi la distance entre  $P_1$  et  $P_2$  tend aussi vers zéro. On définit alors le **vecteur vitesse instantané** comme la limite du vecteur vitesse moyen quand l'intervalle de temps  $\Delta t$  tend vers zéro :

$$\text{Vecteur vitesse instantané : } \vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

**FIGURE 3-16** Path of a particle in the  $xy$  plane. At time  $t_1$  the particle is at point  $P_1$  given by the position vector  $\vec{r}_1$ ; at  $t_2$  the particle is at point  $P_2$  given by the position vector  $\vec{r}_2$ . The displacement vector for the time interval  $t_2 - t_1$  is  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .



Le vecteur vitesse instantané, noté simplement  $\vec{v}$ , (on l'appellera simplement vecteur vitesse par la suite) correspond à la dérivée du vecteur position. En un point donné,  $\vec{v}$  est tangent à la trajectoire en ce point (cf figure ci-contre).

En coordonnées cartésiennes,  $\vec{v}$  s'écrit :

Vecteur vitesse instantané en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} \equiv \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Il faut noter que  $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$  puisque les vecteurs de base sont constants au cours du temps en direction et en norme.

#### 4.4 Le vecteur accélération moyen et le vecteur accélération instantané

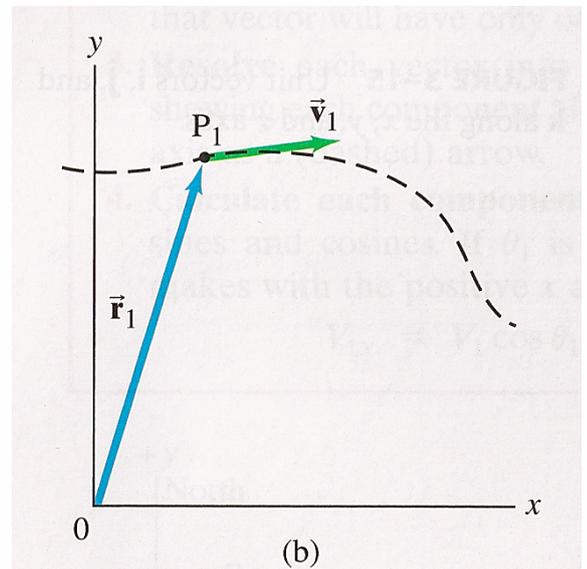
De façon analogue à  $\vec{v}_{moy}$ , on définit pendant l'intervalle de temps  $\Delta t = t_2 - t_1$ , le vecteur accélération moyen par

$$\text{Vecteur accélération moyen : } \vec{a}_{moy} \equiv \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

On considère à présent des intervalles de temps  $\Delta t$  de plus en plus courts. On définit alors le **vecteur accélération instantané** comme la limite du vecteur accélération moyen quand l'intervalle de temps  $\Delta t$  tend vers zéro :

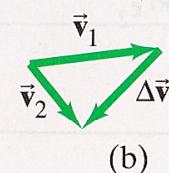
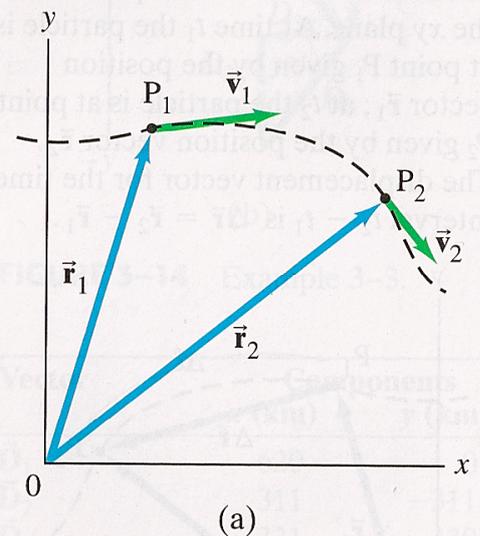
Vecteur accélération instantané :

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$



**FIGURE 3-17** (a) As we take  $\Delta t$  and  $\Delta \vec{r}$  smaller and smaller [compare to Fig. 3-16] we see that the direction of  $\Delta \vec{r}$  and of the instantaneous velocity ( $\Delta \vec{r}/\Delta t$ , where  $\Delta t \rightarrow 0$ ) is (b) tangent to the curve at  $P_1$ .

**FIGURE 3-18** (a) Velocity vectors  $\vec{v}_1$  and  $\vec{v}_2$  at instants  $t_1$  and  $t_2$  for a particle at points  $P_1$  and  $P_2$ , as in Fig. 3-16. (b) The direction of the average acceleration is in the direction of  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ .



Le vecteur accélération instantané, noté simplement  $\vec{a}$ , (on l'appellera simplement vecteur accélération par la suite) correspond à la dérivée première du vecteur vitesse et à la dérivée seconde du vecteur position.

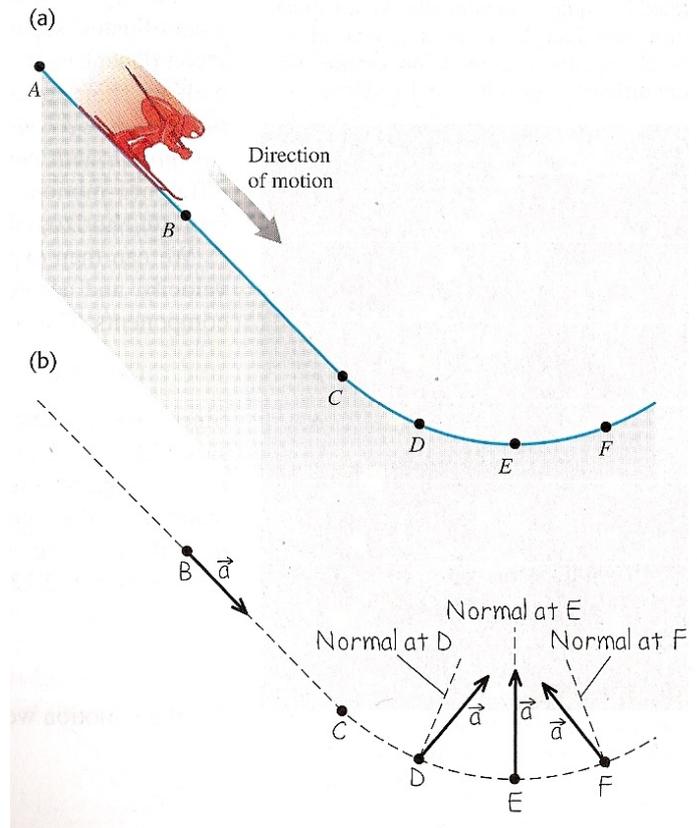
Le vecteur  $\vec{a}$  est non nul si la norme de  $\vec{v}$  change mais aussi, si à norme de  $\vec{v}$  constante, la direction de  $\vec{v}$  change. De plus, pour une trajectoire courbe,  $\vec{a}$  est toujours vers l'intérieur de la courbure comme cela est indiqué sur l'exemple de la figure suivante.

En coordonnées cartésiennes,  $\vec{v}$  s'écrit :

Vecteur accélération instantané en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\vec{a} &\equiv \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \\ &= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \\ &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\end{aligned}$$

3.14 (a) The skier's path. (b) Our solution.



Remarques : Pour la dérivée par rapport au temps, on utilise aussi la notation « point », par exemple

$\frac{dx}{dt}$  est aussi noté  $\dot{x}$ .

#### 4.5 Expression des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires, mouvement à deux dimensions

##### a) Les coordonnées polaires

En coordonnées polaires, un point est repéré par les variables  $[r, \theta]$ , comme indiqué sur la figure suivante, avec  $r \in [0, \infty[$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Le lien avec les coordonnées cartésiennes est immédiat :  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ .

On travaille dans la base orthonormée directe  $(\vec{P}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . Il s'agit d'une **base locale** car elle est attachée au point mobile  $P$  (ce n'est pas le cas pour la base  $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ). Les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  varient dans le temps, leur dérivée respective n'est donc pas nulle.

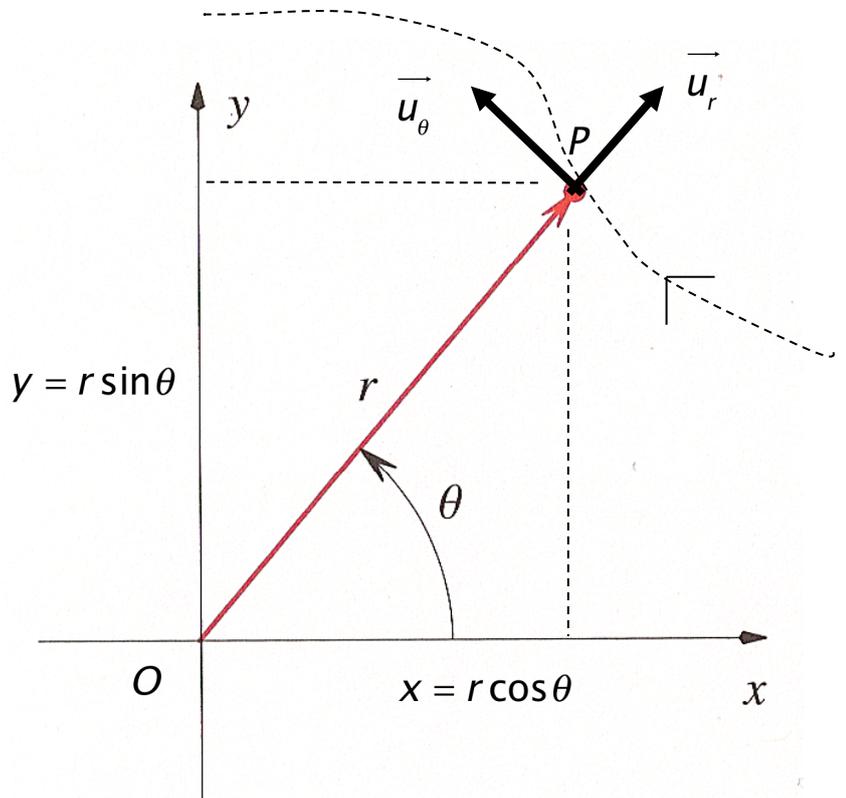
**b) Le vecteur position**

Son expression est très simple dans ce cas :

Vecteur position en polaire :

$$\vec{OP} = r\vec{u}_r$$

**c) Le vecteur vitesse (Calculs au tableau)**



**Figure 6.29**

A point in a plane may be specified by its distance from the origin ( $r$ ) and the angle that a line from the origin to the point makes with the  $x$  axis ( $\theta$ ). The quantities  $r$  and  $\theta$  are called polar coordinates.

Résultats mathématiques intermédiaires importants :  $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et  $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$

Vecteur vitesse en polaire :  $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

d) Le vecteur accélération (Calculs au tableau)

Vecteur accélération en polaire :  $\vec{a} = \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right)\vec{u}_r + \left( r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right)\vec{u}_\theta$

## 4.6 Expression des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques, mouvement à trois dimensions

Il s'agit de la généralisation des coordonnées polaires pour les mouvements en trois dimensions. Un point est repéré par les variables

$r, \theta, z$ , comme indiqué sur la figure ci dessous.

Il s'agit du même  $z$  qu'en coordonnées cartésiennes.  $r \in [0, \infty[$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $z \in ]-\infty, \infty[$ . On travaille dans la base orthonormée directe

$\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\}$ . Il s'agit encore d'une **base locale**

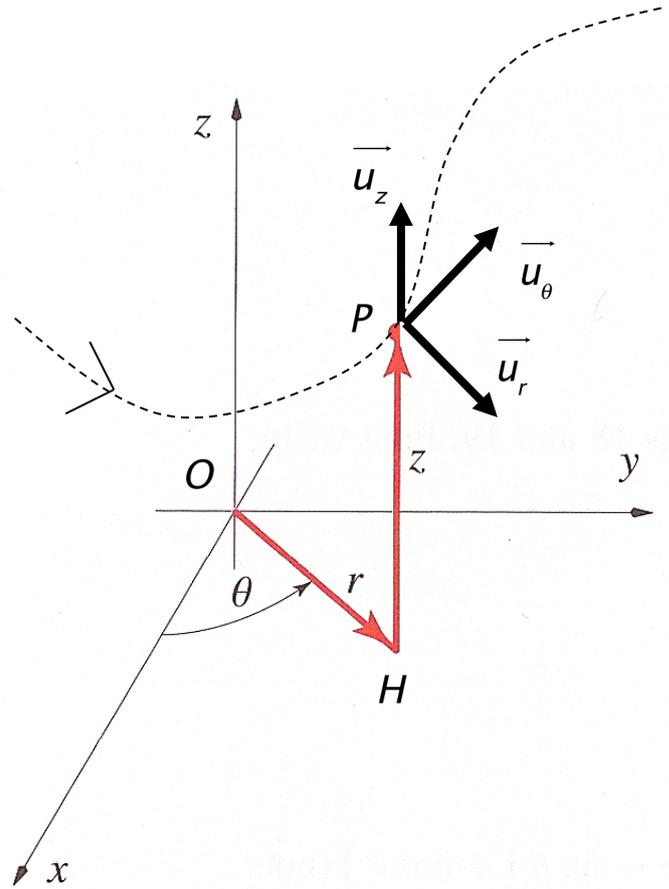
car elle est attachée au point mobile  $P$ . Les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  varient dans le temps, leur dérivée respective n'est donc pas nulle. Par contre  $\vec{u}_z$  est un vecteur constant, sa dérivée temporelle est nulle.

En notant que  $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$  et en utilisant la définition de  $\vec{v}$  et de  $\vec{a}$ , on arrive facilement aux résultats suivants :

$$\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \vec{u}_r + \left( r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) \vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$



**Figure 8.14**

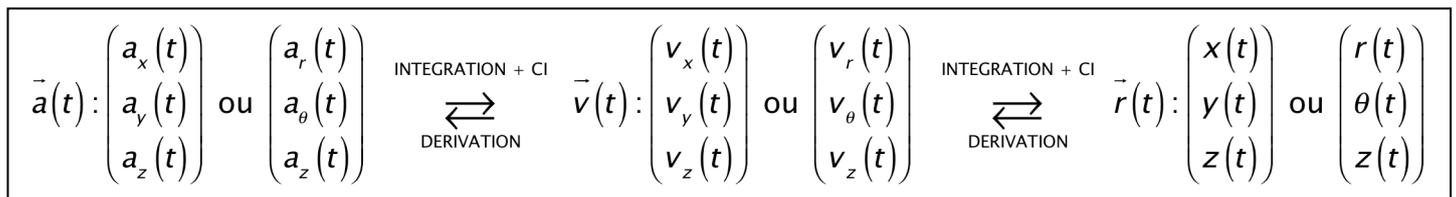
A point specified by the cylindrical coordinates  $r$ ,  $\theta$ , and  $z$ .

## V- EXEMPLE DE MOUVEMENTS « USUELS » IMPORTANTS

Dans cette partie, nous allons supposer connue l'accélération  $\vec{a}$  à laquelle est soumis notre point matériel. Nous verrons l'origine de cette accélération dans le cours de dynamique. Mais vous savez déjà, d'après le principe fondamental de la dynamique, que l'accélération à laquelle est soumis un

corps physique est reliée aux forces qu'il subit par  $\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$ .

Notre programme, dans cette partie, consiste à trouver la trajectoire du point matériel à partir de  $\vec{a}$  en procédant par intégrations successives et grâce à la connaissance des conditions initiales (CI). Le schéma suivant résume la procédure :



### 5.1 Mouvement rectiligne à accélération constante $\Rightarrow \vec{a} = cst$

Il s'agit d'un exemple important. En effet, si l'on néglige la résistance de l'air, tous les corps physiques à la surface de la Terre sont soumis à une accélération constante  $g \approx 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  (il s'agit de la chute libre). Cette accélération a pour origine, comme nous le verrons dans le cours de dynamique, l'attraction gravitationnelle entre la terre et l'objet considéré.

L'exemple suivant peut correspondre au lâcher d'une pierre du haut de la tour de Pise en Italie (fameuse expérience de Galilée).

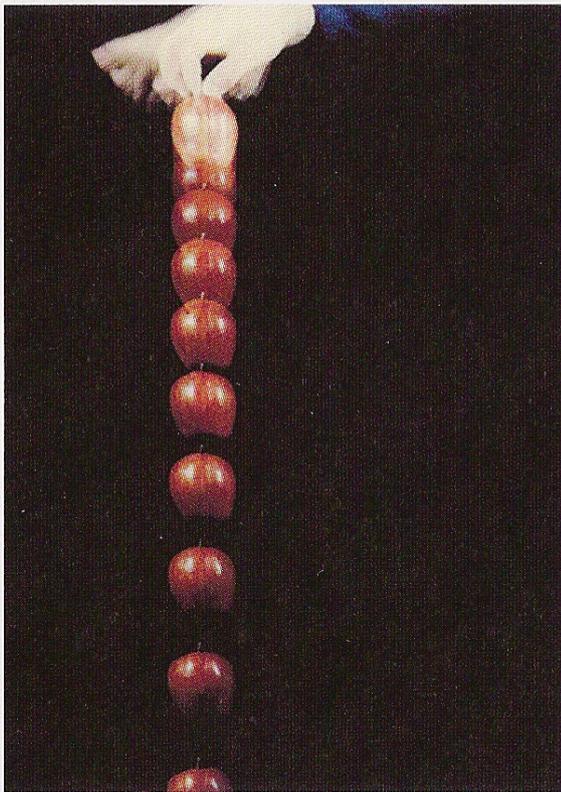
⇒ Hypothèse :  $\vec{a} = -g\vec{k}$  avec l'axe  $(Oz)$  orienté suivant la verticale ascendante.

⇒ Conditions initiales (CI) : A  $t = 0$ ,  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $z = z_0$  et  $v_{x0} = v_{y0} = v_{z0} = 0$ .

⇒ Intégrations : (Calculs au tableau)

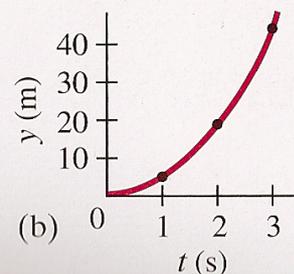
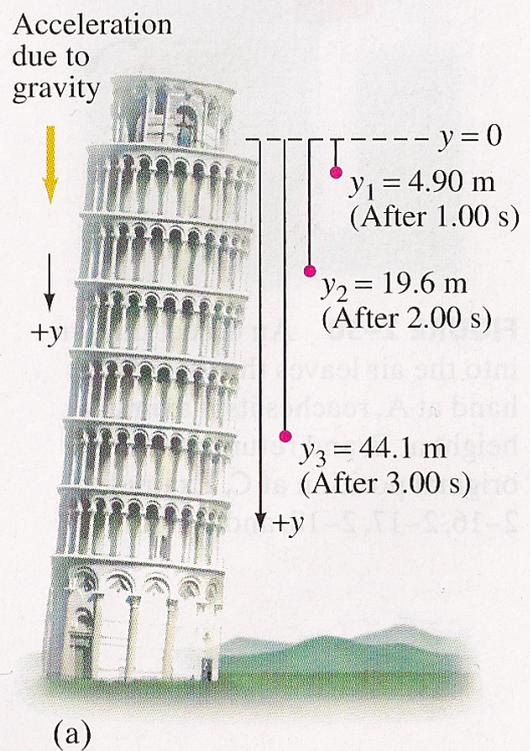
La vitesse croît linéairement avec le temps alors que la position croît quadratiquement avec le temps (comme son carré). Les figures ci-dessous illustrent la chute libre.

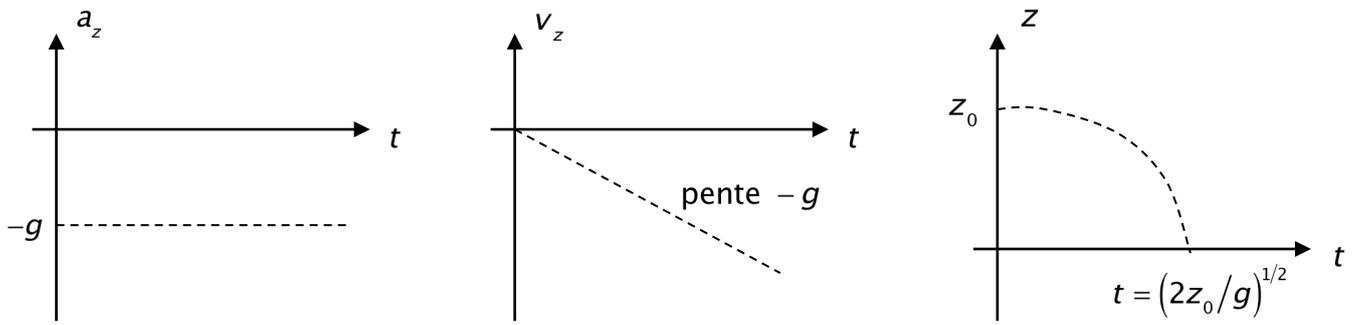
**FIGURE 2–26** Multiflash photograph of a falling apple, at equal time intervals. The apple falls farther during each successive interval, which means it is accelerating.



Les courbes ci-dessous représentent l'évolution de  $a_x(t)$  (dans ce cas, c'est élémentaire), de  $v_z(t)$  et de  $z(t)$ .

**FIGURE 2–29** Example 2–14. (a) An object dropped from a tower falls with progressively greater speed and covers greater distance with each successive second. (See also Fig. 2–26.) (b) Graph of  $y$  vs.  $t$ .





## 5.2 Mouvement sinusoïdal (ou harmonique) à 1 D $\Rightarrow a_x = -\omega^2 x$

On s'intéresse au mouvement unidimensionnel (suivant l'axe  $(Ox)$  par exemple) d'un point matériel soumis à une accélération de la forme  $a_x = -\omega^2 x$  où  $\omega$  est homogène à une **pulsation** en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Il s'agit, par exemple, de l'accélération à laquelle est soumise une masse accrochée à un ressort étiré (cf cours sur l'oscillateur harmonique). Le point matériel va décrire **des oscillations sinusoïdales (on dit aussi harmoniques)**. Ce type de mouvement est très important, on le rencontre dans de très nombreuses branches des sciences physiques. Ce qui va suivre est donc important pour la suite du cours de physique.

$\Leftrightarrow$  Hypothèse :  $a_x = -\omega^2 x$

$\Leftrightarrow$  Conditions initiales (CI) : A  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $v = v_0$ .

$\Leftrightarrow$  Equation différentielle à résoudre :  $a_x \equiv \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$  soit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Il s'agit de l'équation différentielle dite de l'**oscillateur harmonique** très importante dont il faut parfaitement connaître la solution.

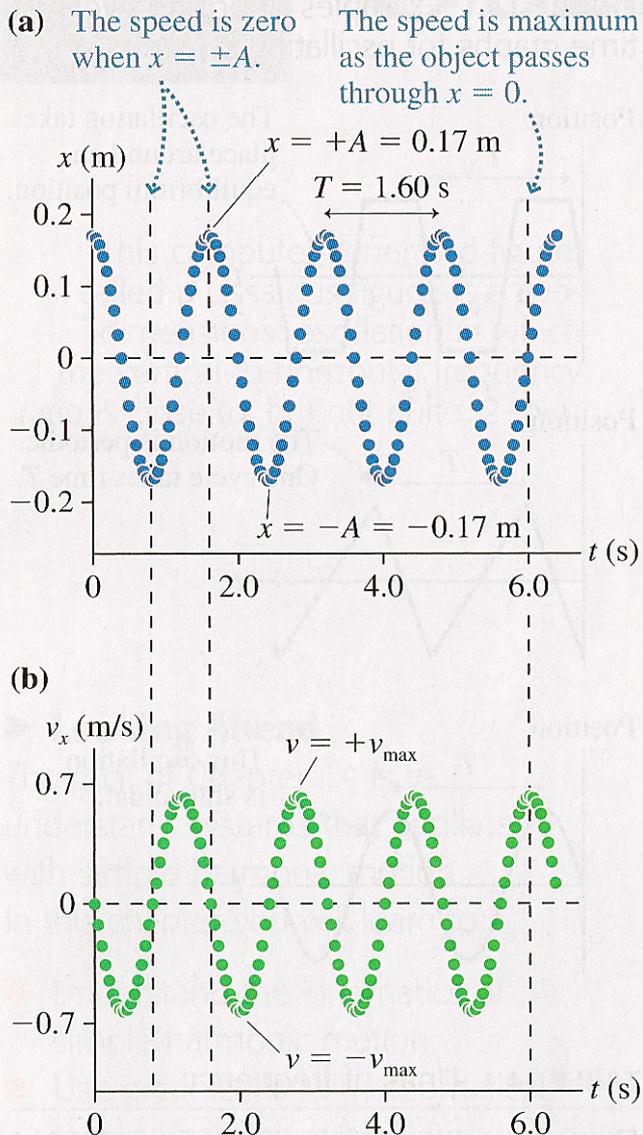
$\Leftrightarrow$  Résolution : (Calculs au tableau)

⇒ Expression de l'amplitude et de la phase à l'origine en fonction des CI : (Calculs au tableau)

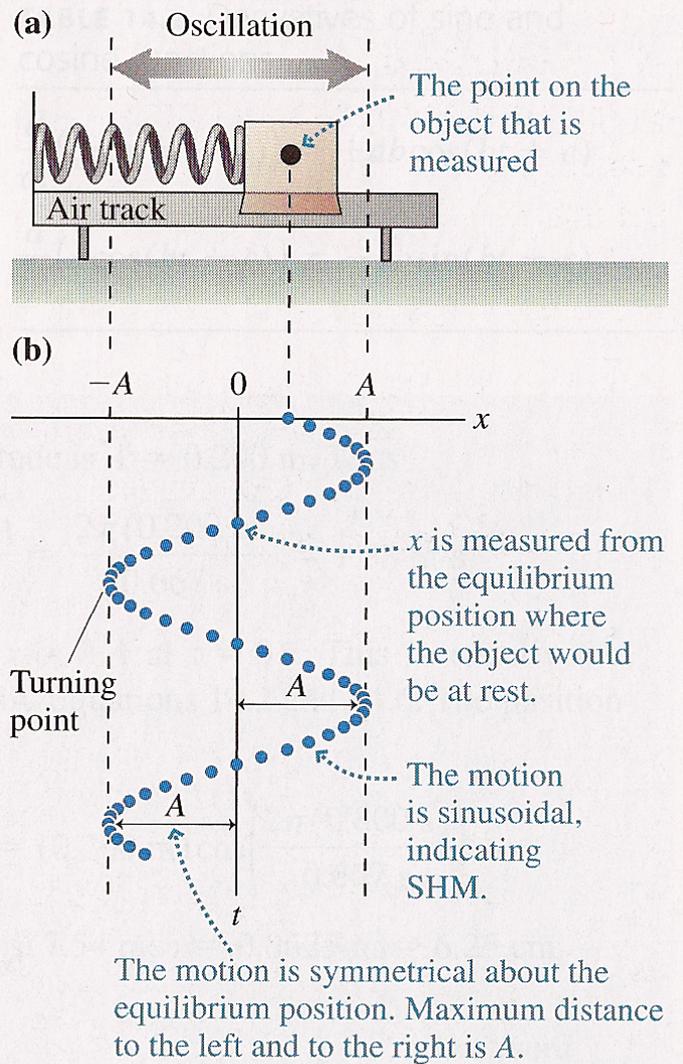
⇒ Bilan:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \Rightarrow \text{solution: } x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0) \text{ avec } \phi_0 \text{ et } A \text{ à calculer avec les CI}$$

**FIGURE 14.3** Position and velocity graphs of the experimental data.



**FIGURE 14.2** A prototype simple-harmonic-motion experiment.



La figure ci-dessus, à gauche, donne un exemple de mouvement harmonique dans le cas d'une masse liée à un ressort sur une table à coussin d'air pour négliger les frottements.

La valeur maximale de  $x$  vaut  $A$  d'où le nom d'amplitude maximale donné à  $A$ . Pour  $t=0$ ,  $x(t=0) = A \cos \phi_0$ . L'argument du  $\cos$ ,  $\phi \equiv \omega t + \phi_0$ , est appelé la phase et pour  $t=0$ ,  $\phi \equiv \phi_0$  dont le nom de phase à l'origine donné à  $\phi_0$ .

La période des oscillations  $T$  est reliée à la pulsation  $\omega$  par  $T \equiv \frac{2\pi}{\omega}$

La vitesse a pour expression :  $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi_0)$ . Ainsi quand l'amplitude est maximale, la vitesse est nulle et la vitesse est maximale quand  $x=0$ . Ceci est illustré sur les figures ci-dessus à droite.



### 5.3 Mouvement circulaire (très important pour toute la suite du cours)

Il s'agit de l'étude d'un point matériel (par exemple un cheval de manège) qui décrit un cercle de **rayon constant** donné à vitesse angulaire  $\omega \equiv \dot{\theta}$  quelconque, c'est-à-dire qui peut varier dans le temps (au démarrage du manège et à l'arrêt de ce dernier).

Il est grandement préférable de travailler en coordonnées polaires, donc dans la base locale  $(P, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

a) Cas général, mouvement non uniforme  $\Rightarrow r = cst$  et  $\omega \equiv \dot{\theta}$  variable

On reprend l'étude du mouvement en coordonnées polaires mais cette fois avec  $r = cst$  ce qui implique  $\dot{r} = 0$ .

$\Leftrightarrow$  Vecteur position :  $\vec{r} = r \vec{u}_r$

$\Leftrightarrow$  Vecteur vitesse :  $\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = r \omega \vec{u}_\theta$

Le vecteur vitesse est bien tangent à la trajectoire circulaire. On a pour la norme de la vitesse :

$$v = r\omega$$

$\Leftrightarrow$  Vecteur accélération :  $\vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -r \omega^2 \vec{u}_r + r \dot{\omega} \vec{u}_\theta$

a) Cas particulier, mouvement uniforme  $\Rightarrow$   $r = cst$  et  $\omega \equiv \dot{\theta} = cste$

On a cette fois  $\omega \equiv \dot{\theta} = cste$  soit  $\ddot{\theta} = 0$ . Les expressions du vecteur position et du vecteur vitesse restent identiques au cas général précédent. Par contre l'expression du vecteur accélération change,  $\vec{a}$  n'a plus de composante suivant  $\vec{u}_\theta$  (composante tangentielle) mais seulement une composante suivant  $\vec{u}_r$  (composante radiale ou centripète).

$\Rightarrow$  Vecteur position :  $\vec{r} = r\vec{u}_r$

$\Rightarrow$  Vecteur vitesse :  $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = r\omega\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow$  Vecteur accélération :  $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -r\omega^2\vec{u}_r$ . La

norme du vecteur accélération vaut:

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

Les expressions de  $\vec{v}$  et de  $\vec{a}$  sont à bien connaître. On va les utiliser très souvent dans le cours de physique.

La figure ci-contre résume la situation pour le mouvement circulaire.

