TRAVAIL, ENERGIE CINETIQUE, ENERGIE POTENTIELLE ET ENERGIE MECANIQUE

« There is a fact, or if you wish, a law, governing all natural phenomena that are known to date. There is no exception to this law, it is exact as far as we know. The law is called the conservation of energy. It states that there is a certain quantity, which we call energy, that does not change in the manifold changes which nature undergoes.
Richard P. Feynman (1928-1988)

Nous avons vu la puissance des lois de Newton pour la compréhension et la résolution de nombreux problèmes physique. Dans ce chapitre, nous allons considérer une approche basée sur **l'une des grandeurs la plus fondamentale et la plus universelle en physique : L'ENERGIE.**

• Il est difficile de définir de manière unique l'énergie, elle peut présenter différentes formes. On peut voir l'énergie comme **la monnaie du monde physique**.

• Nous aborderons le théorème de l'énergie mécanique qui est résumée par le schéma ci-dessous (dont l'explication est le propos de ce chapitre). Ce dernier est un cas particulier du principe de conservation de l'énergie (ou premier principe de la thermodynamique). C'est pourquoi ce schéma sera complété dans le cours de thermodynamique.

Environnement

$W_{nc} > 0 \Longrightarrow$

Système physique

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_c \leftrightarrow E_p$$

$$\Delta E_c = W_{nc} + W_c$$

$$\Delta E_p = -W_c$$

$$\Delta E_m = W_{nc}$$

$\Longrightarrow W_{nc} < 0$

<u>Notation :</u>

$E_c =$ énergie cinétique, $E_p =$ énergie potentielle, $E_m =$ énergie mécanique, $W_{nc} =$ travail des forces non conservatives et $W_c =$ travail des forces conservatives

Dans tout ce qui suit, toutes les grandeurs sont exprimées dans un référentiel galiléen $\Re_g$.

I – Travail d'une force

On peut définir le travail (notation W pour Work en anglais) comme **le transfert d'énergie mécanique à un système physique par l'intermédiaire d'une force**.

Ce travail peut être positif ou négatif selon que le système reçoit (de l'environnement extérieur) où donne du travail (à l'environnement extérieur).

1.1 Travail d'une force constante, cas unidimensionnel

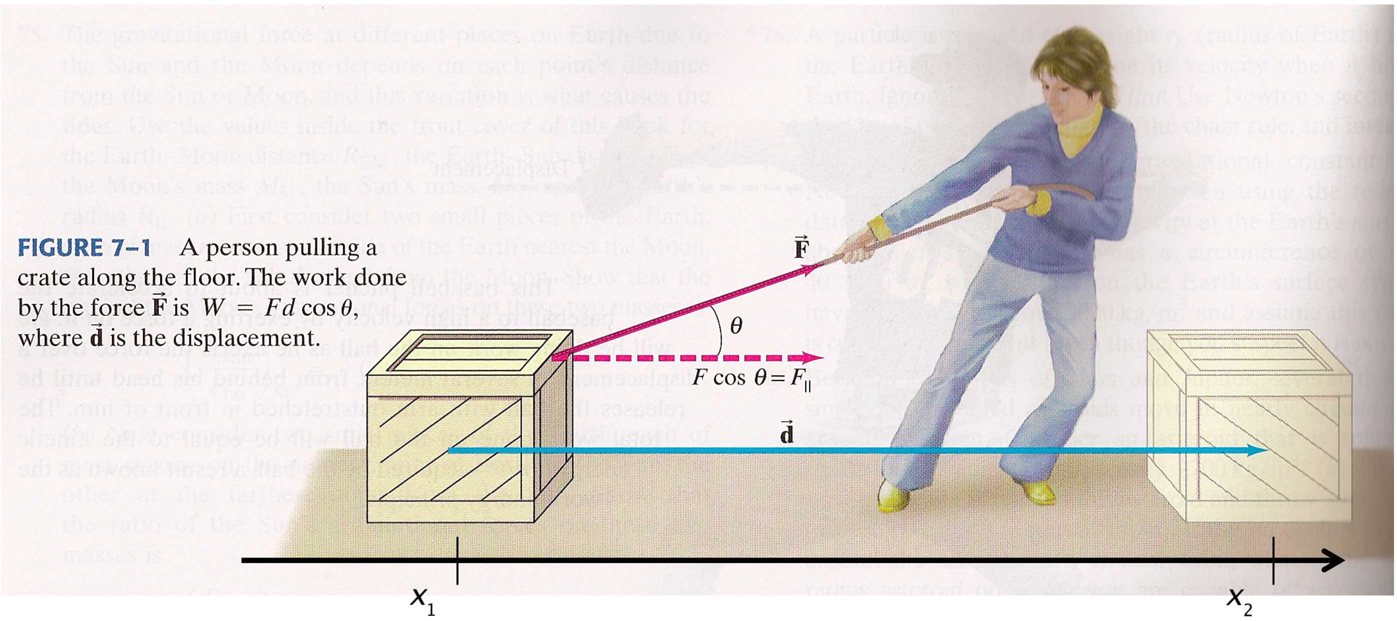


FIGURE 7–1 A person pulling a crate along the floor. The work done by the force $\vec{\mathbf{F}}$ is $W = Fd\cos\theta$, where $\vec{\mathbf{d}}$ is the displacement.

On considère la figure ci-dessus où une personne tire une caisse avec une force constante $\vec{F}$. Cette force exerce un « travail » puisqu'elle est capable de déplacer la case sur une distance horizontale $d = x_2 - x_1$. Le travail de cette force vaut :

$$\boxed{W = F\,d\cos\theta}$$

Le travail s'exprime en $kg.m^2.s^{-2}$ = J, le travail a la dimension d'une énergie.

On constate que $F\cos\theta$ représente la composante de la force $\vec{F}$ selon la direction du déplacement $\vec{d}$. En résumé :

Travail d'une force constante = déplacement × composante de la force parallèle au déplacement

1.2 Travail d'une force variable

On considère à présent une force variable $\vec{F}$ (en norme, en direction ou les deux) ce qui représente une situation plus réaliste. La figure ci-dessous représente le trajet d'un point matériel du point a au point b qui est soumis à la force $\vec{F}$ variable sur ce trajet. On souhaite calculer le travail de cette force sur le trajet considéré.

On découpe le trajet en petits intervalles de longueur $\Delta\ell_i$. Sur chaque intervalle $\Delta\ell_i$, la force $\vec{F_i}$ peut être considérée comme constante. Ainsi sur $\Delta\ell_i$:

$$\delta W_i = F_i \cos\theta_i \, \Delta\ell_i$$

Le symbole δ symbolise une petite quantité, δW représente **un travail infinitésimal** c'est-à-dire très petit, on parle aussi de **travail élémentaire**.

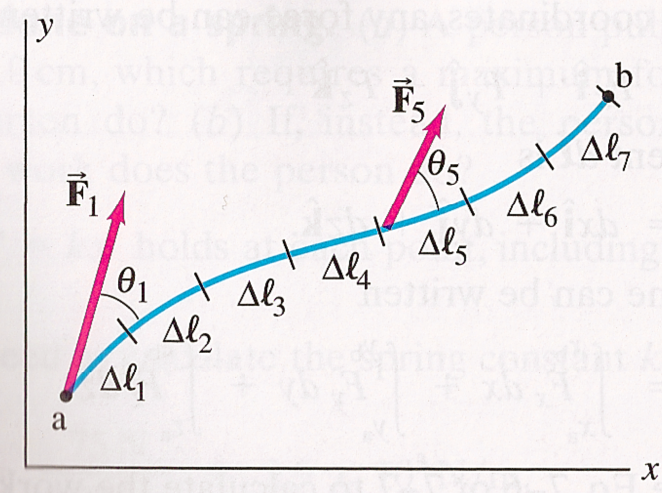
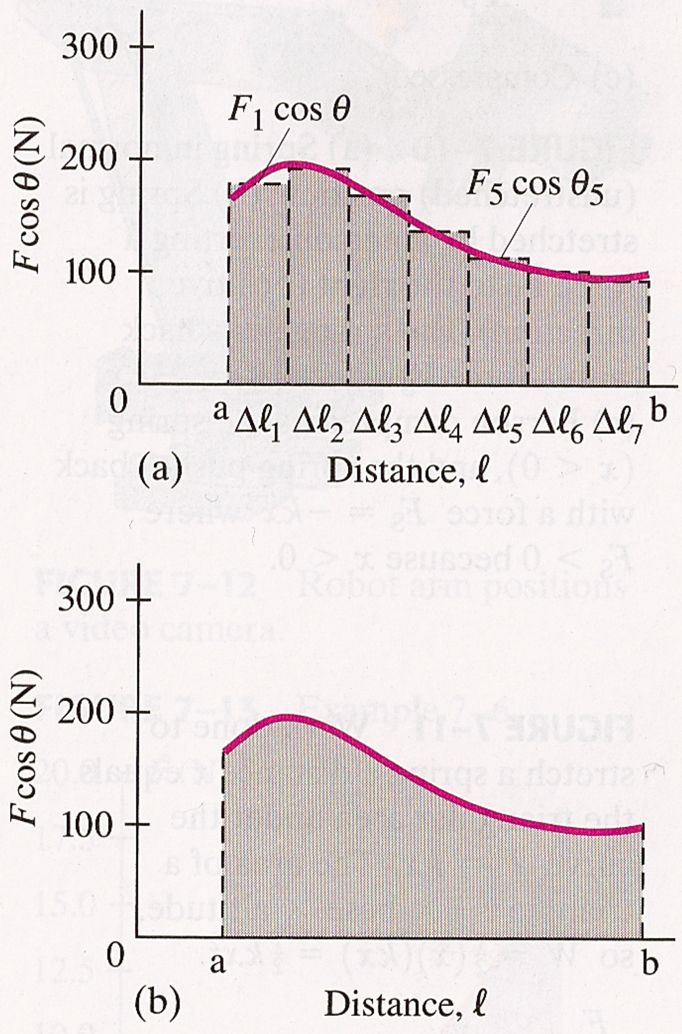


FIGURE 7–8 A particle acted on by a variable force, $\vec{F}$, moves along the path shown from point a to point b.

FIGURE 7–9 Work done by a force F is (a) approximately equal to the sum of the areas of the rectangles, (b) exactly equal to the area under the curve of $F \cos\theta$ vs. ℓ.



Le travail total de la force $\vec{F}$ sur le trajet de longueur $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ldots = \sum_i \ell_i$ s'exprime , en première approximation, comme la somme des travaux élémentaires δW_i :

$$W \approx \sum_i \delta W_i = \sum_i F_i \cos\theta_i \, \Delta\ell_i$$

$\sum_i \delta W_i$ représente la somme de l'air de chaque rectangle alors que le véritable travail total W représente l'air sous la courbe (figure (a) ci-contre). Pour que les deux airs correspondent, il faut faire tendre chaque $\Delta\ell_i$ vers zéro :

$$W = \lim_{\Delta\ell_i \to 0} \sum_i F_i \cos\theta_i \, \Delta\ell_i = \int_a^b F \cos\theta \, d\ell$$

On retrouve le concept d'intégrale comme une somme infinie. Le symbole $\int$ représente un S allongé et remplace le symbole $\sum$. $\Delta\ell$ est remplacé par $d\ell$ qui signifie une distance infinitésimale (très petite).

$W = \int_a^b F \cos\theta \, d\ell$ représente l'air sous la courbe de la figure (b) ci-contre.

A la limite où $\Delta\ell$ tend vers zéro, $d\ell$ représente la norme du **vecteur déplacement infinitésimal** $\vec{d\ell}$. La direction du vecteur $\vec{d\ell}$ est suivant la tangente au trajet au point considéré. θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{d\ell}$ et $\vec{F}$ en chaque point du trajet. Il est ainsi possible de réécrire $W = \int_a^b F\cos\theta\, d\ell$ en utilisant le produit scalaire pour arriver à la définition générale du travail d'une force le long d'un trajet :

$$\boxed{W = \int_a^b \vec{F}.\vec{d\ell} \quad \text{(définition générale du travail d'une force)}}$$

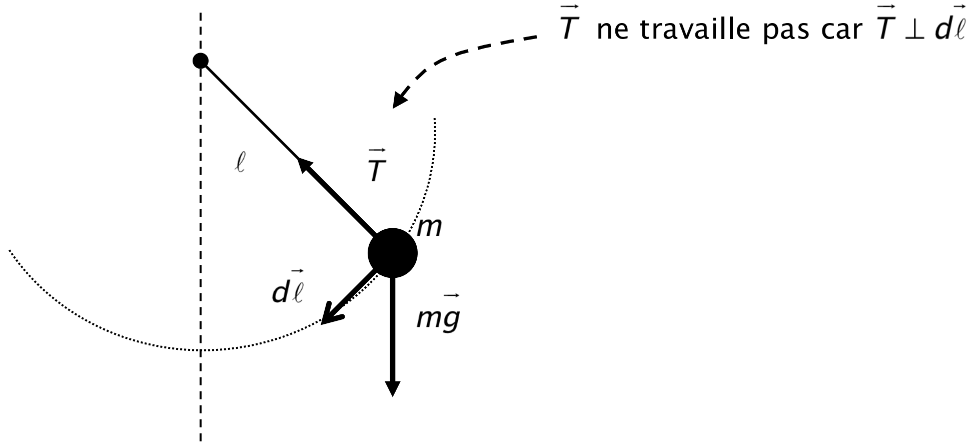
On parle d'une **intégrale de chemin** puisque l'on intègre $\vec{F}.\vec{d\ell}$ le long d'un chemin. On rencontrera plus tard des intégrales surfaciques liées au concept de flux d'un champ de vecteur. L'expression mathématique du travail contient les idées clés suivantes :

Concepts clé : relations entre force, déplacement et travail

- Le travail W est fourni par une force $\vec{F}$ qui agit sur un objet physique.
- Le travail dépend de la force qui agit sur l'objet mais aussi du déplacement de cet objet.
- La valeur du travail dépend de la direction de $\vec{F}$ par rapport au déplacement de l'objet.
- Le travail peut être positif, négatif ou nul. Cela dépend de l'angle entre le vecteur force $\vec{F}$ et le vecteur déplacement $\vec{d\ell}$
- Si le déplacement est nul alors $W = 0$ même si une force agit sur l'objet .

Remarques :

- En coordonnées cartésiennes, $\vec{d\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ et $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, le produit scalaire s'écrit alors: $W = \int_{x_a}^{x_b} F_x\, dx + \int_{y_a}^{y_b} F_y\, dy + \int_{z_a}^{z_b} F_z\, dz$. Nous serons conduits à exprimer $\vec{d\ell}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.
- $\delta W = \vec{F}.\vec{d\ell}$ représente le travail élémentaire, on peut alors écrire le travail total comme la somme (ici infinie) des travaux élémentaires : $W = \int \delta W$.
- Si $\vec{F} \perp \vec{d\ell}$ alors $W = 0$. Une force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas. C'est le cas de la tension du fil dans l'exemple du pendule simple ci-dessous.



• Si $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F}_3 + \ldots$ alors $W = \int_a^b \left(\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F}_3 + \ldots\right).d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{F_1}.d\vec{\ell} + \int_a^b \vec{F_2}.d\vec{\ell} + \int_a^b \vec{F}_3.d\vec{\ell} + \ldots$ On peut écrire $W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots$

II – Puissance d'une force

La puissance d'une force représente **un travail par unité de temps** et s'exprime donc en $\mathrm{J.s^{-1} = W}$ où W est l'abréviation pour Watt et s'exprime par :

$$P \equiv \vec{F}.\vec{v} \quad \left(\text{Définition de la puissance d'une force}\right)$$

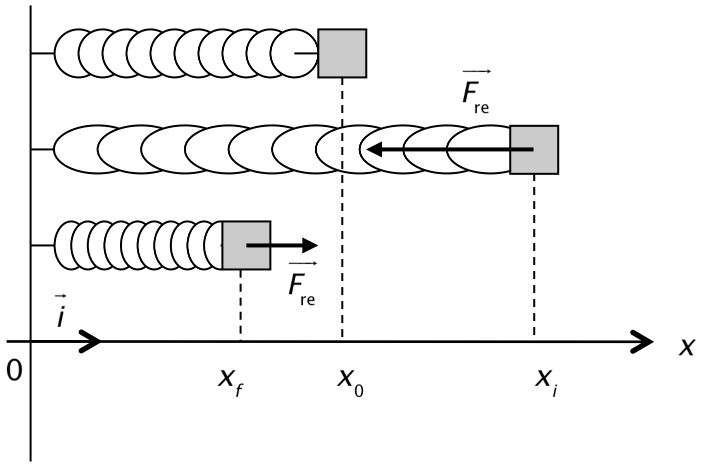
$\vec{v}$ est la vitesse de la particule considérée. En se rappelant que $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{\ell}}{dt}$ (le vecteur déplacement élémentaire avait été noté $d\vec{r}$ dans le chapitre sur la cinématique), $\delta W = \vec{F}.d\vec{\ell} = \vec{F}.\vec{v}\,dt$ soit $\frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = F\,v\cos\theta = P$. Ainsi la puissance est la dérivée du travail par rapport au temps, c'est donc bien un travail par unité de temps. Il est préférable de noter $\frac{\delta W}{dt}$ plutôt que $\frac{dW}{dt}$ pour des raisons que nous verrons dans le cours de thermodynamique. En résumé :

$$\frac{\delta W}{dt} = P \quad \text{et} \quad W = \int \delta W = \int_a^b \vec{F}.d\vec{\ell} = \int_{t_a}^{t_b} P\,dt$$

La particule se trouve en a à t_a et en b à t_b.

III – Exemples importants de travaux

3.1 Travail de la force de rappel élastique d'un ressort



On souhaite calculer le travail de $\overrightarrow{F_{re}}$ lorsque la masselotte se déplace de la position initiale x_i à la position finale x_f.

$$d\vec{\ell} = dx\,\vec{i}$$

$$\overrightarrow{F_{re}} = -k\left(\ell - \ell_0\right)\vec{i} = -k\left(x - x_0\right)\vec{i}$$

$$\overrightarrow{F_{re}}.d\vec{\ell} = -k\left(x - x_0\right)dx$$

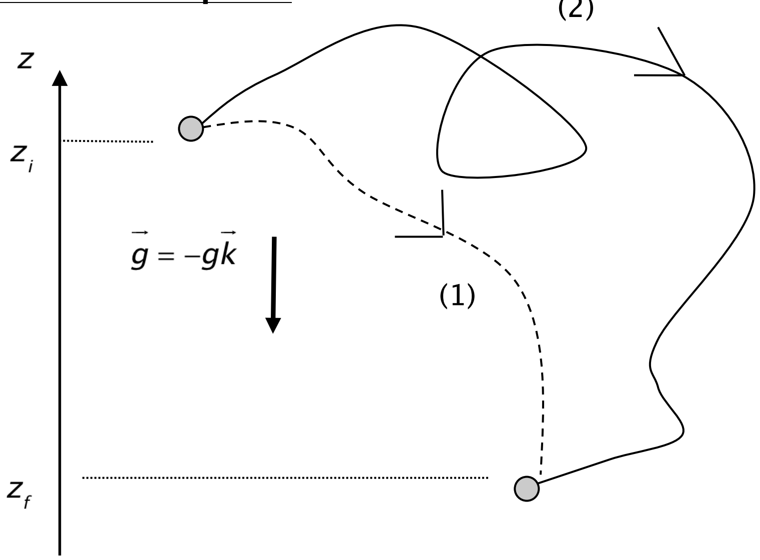
$$W = \int_{x_i}^{x_f} -k\left(x - x_0\right)dx = -k\left[\frac{\left(x - x_0\right)^2}{2}\right]_{x_i}^{x_f}$$

On arrive au résultat important suivant :

$$\boxed{W = -\left(\frac{k}{2}\left(x_f - x_0\right)^2 - \frac{k}{2}\left(x_i - x_0\right)^2\right)}$$

Ce travail a été écrit sous une forme qui sera facile à interpréter par la suite en utilisant le concept d'énergie potentielle. On constate que ce travail ne dépend que du point de départ x_i et du point d'arrivée x_f mais pas de la nature du trajet entre ces deux points, c'est-à-dire dans ce cas du nombre d'oscillations entre x_i et x_f. Nous reviendrons sur l'interprétation physique de ce résultat.

3.2 Travail du poids



$$d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{k}$$

$$m\vec{g}.d\vec{\ell} = -mg\,dz$$

$$W = \int_{z_i}^{z_f} -mg\,dz = -mg\left[z\right]_{z_i}^{z_f}$$

$$\boxed{W = -\left(mg\,z_f - mg\,z_i\right)}$$

Encore une fois, ce travail ne dépend que du point de départ z_i et du point d'arrivée z_f mais pas de la nature du trajet entre ces deux points. Le travail du poids sur le trajet 1 et celui sur le trajet 2 sont identiques.

IV – Théorème de l'énergie cinétique

4.1 L'énergie cinétique

L'énergie cinétique (notation E_c) est l'énergie liée au mouvement d'un corps physique

Soit une particule de masse m, animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen donné. L'énergie cinétique est définie par :

$$E_c \equiv \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{(Définition de l'énergie cinétique)}$$

E_c étant une énergie, elle s'exprime en J. Il s'agit d'une grandeur toujours positive dont la valeur dépend du référentiel dans lequel on l'évalue (par l'intermédiaire de $\vec{v}$)

4.2 Théorème de l'énergie cinétique

On considère toujours une particule de masse m, animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen donnée et soumise à $\sum\vec{F}$.

Nous allons établir un résultat mathématique utile pour la suite : **(calcul au tableau)**

A présent, calculons le travail de $\sum\vec{F}$ lorsque la particule va d'un point initial i vers un point final f : **(calcul au tableau)**

On arrive au résultat important connu sous le nom de **théorème de l'énergie cinétique** :

Théorème de l'énergie cinétique:

$$\boxed{W_{i\to f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta E_c}$$

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail de la force totale qui lui est appliquée.

On peut réécrire ce résultat en faisant apparaître la puissance; pour cela, il suffit de le « dériver » :

$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{dv^2}{dt} = m\left(\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \vec{v}.\sum\vec{F} = P$ en utilisant le principe fondamental de la dynamique. De plus $\frac{dE_c}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta E_c}{\Delta t} = \frac{\delta W}{dt}$. On arrive au théorème de la puissance cinétique qui est une variante du théorème de l'énergie cinétique (sa forme dérivée) :

Forme dérivée du théorème de l'énergie cinétique ou théorème de la puissance cinétique:

$$P = \frac{dE_c}{dt} = \frac{\delta W}{dt}$$

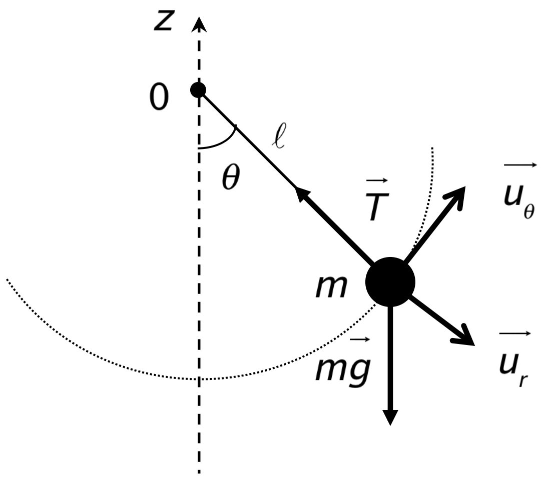
Remarques :

- $\Delta E_c \equiv E_{cf} - E_{ci}$ représente une **variation finie** de l'énergie cinétique entre deux instants t_i et t_f.
- dE représente une **variation infinitésimale** (très petite) de l'énergie cinétique entre deux instants infiniment proches, t_i et t_f.
- δW représente une **quantité infinitésimale** (très petite) de travail.

- L'expression $\cancel{\Delta W}$ n'a pas de sens, le travail ne varie pas. Un système physique reçoit ou cède une quantité finie de travail W ou une quantité infinitésimale de travail δW. La notation d et δ ont des significations différentes. Nous allons rencontrer souvent ces deux notations dans le cours de thermodynamique.
- Si $W > 0$ alors $\Delta E_c > 0$ et la norme de la vitesse croît, on dit que le **travail est moteur**.
- Si $W < 0$ alors $\Delta E_c < 0$ et la norme de la vitesse décroît, on dit que **le travail est résistant.**
- Le théorème de l'énergie cinétique est très pratique pour déterminer l'équation différentielle du mouvement ainsi que les vitesses.

• Le théorème de l'énergie cinétique constitue la première partie du puzzle en vue de l'établissement du théorème de l'énergie mécanique comme nous allons le voir dans la suite.
Ce dernier n'étant lui-même qu'un cas particulier du principe fondamental de conservation de l'énergie.

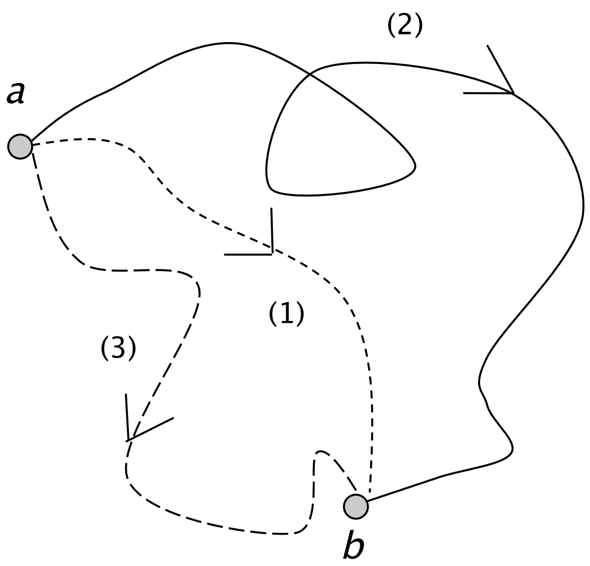
4.3 Utilisation du théorème de l'énergie cinétique, exemple du pendule simple



On souhaite déminer la vitesse de la masse à un instant quelconque sachant qu'à $t = 0$ $\theta = \theta_0$ et $v = 0$. **(calcul au tableau)**

V – Forces conservatives, énergie potentielle et énergie mécanique

5.1 Forces conservatives et non conservatives



Conditions pour qu'une force soit conservative :

Une force $\vec{F}$ qui agit sur une particule est dite **CONSERVATIVE** si et seulement si elle satisfait les deux conditions suivantes :

- $\vec{F}$ dépend uniquement de la position de la particule $\vec{r}$ (et pas de sa vitesse $\vec{v}$, du temps t et de toute autre variable).
- Pour deux points a et b, le travail $W_{a \to b}$ de la force $\vec{F}$ est le même pour tous les chemins entre a et b.

Par exemple, pour une force conservative, sur les trois trajets de la figure ci-dessus : $W_{a\to b}(1) = W_{a\to b}(2) = W_{a\to b}(3)$.

Une conséquence directe du deuxième point de la définition d'une force conservative est que, sur un trajet fermé, le travail d'une force conservative est nul.

$$\boxed{\text{Force conservative } \Rightarrow \oint \vec{F}.d\vec{\ell} = 0}$$

Le symbole $\oint$ signifie que l'on intègre sur un chemin fermé.

<u>Exemples de forces conservatives et non conservatives :</u>

• Le **poids** $m\vec{g}$ **est une force conservative**. En effet, le travail pour aller d'un point à un autre $W_{m\vec{g}} = -\left(mgz_f - mgz_i\right)$ ne dépend que de l'altitude de départ et de l'altitude de départ d'arrivée mais pas du trajet suivi. De plus $m\vec{g}$ ne dépend que de la position de la particule par l'intermédiaire de $\vec{g}$.

• **La force de rappel élastique** $\overrightarrow{F_{\text{re}}}$ **est une force conservative.** En effet, le travail pour aller d'un point à un autre $W_{\overrightarrow{F_{\text{re}}}} = -\left(\frac{k}{2}\left(x_f - x_0\right)^2 - \frac{k}{2}\left(x_i - x_0\right)^2\right)$ ne dépend que de la position de départ et de la position d'arrivée mais pas du trajet suivi. De plus $\overrightarrow{F_{\text{re}}} = -k\left(x - x_0\right)\vec{i}$ ne dépend que de la position de la particule.

• **La force de frottement fluide n'est pas conservative.** En effet, son expression dépend de la vitesse de la particule et de plus, on peut montrer que son travail dépend du trajet suivi.

• **La force de frottement statique et dynamique n'est pas conservative.** En effet, on peut montrer que leur travail dépend du trajet suivi.

Les forces conservatives jouent un rôle important en physique. Nous allons montrer qu'elles peuvent s'écrire comme la dérivée d'une fonction dite **énergie potentielle** qui constitue, après le théorème de l'énergie cinétique, le deuxième morceau du puzzle dans l'établissement du théorème de l'énergie mécanique.

<u>5.2 Energie potentielle</u>

L'énergie potentielle, après l'énergie cinétique qui est liée à la vitesse d'un système physique, est une autre forme importante d'énergie que nous rencontrons. Sans plus de détails pour l'instant, nous pouvons dire que :

> L'énergie potentielle (notation E_p) est l'énergie liée à la **position** d'un système physique.

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'énergie potentielle est intimement liée aux forces conservatives. Nous allons illustrer cela sur l'exemple de la force de rappel élastique.

Le travail de $\overrightarrow{F_{re}}$ pour aller d'un point à un autre s'écrit : $W_{\overrightarrow{F_{re}}} = -\left(\frac{k}{2}\left(x_f - x_0\right)^2 - \frac{k}{2}\left(x_i - x_0\right)^2\right)$. On introduit la fonction $E_p\left(x\right) = \frac{k}{2}\left(x - x_0\right)^2 + A$ ou A est une constante arbitraire quelconque. On peut alors écrire $W_{\overrightarrow{F_{re}}} = -\left[E_p\left(x_f\right) - E_p\left(x_i\right)\right] \equiv -\Delta E_p$. On constate que $W_{\overrightarrow{F_{re}}}$ s'écrit comme l'opposée de la variation d'une fonction $E_p\left(x\right)$ qui dépend des seules coordonnées d'espace de la particule, ici x.

Pour une force conservative, il existe une fonction énergie potentielle $E_p\left(\vec{r}\right)$ telle que :

$$W = \int_i^f \vec{F}.d\vec{\ell} = -\left[E_p\left(\vec{r_f}\right) - E_p\left(\vec{r_i}\right)\right] \equiv -\Delta E_p$$

(Pour un travail infinitésimal: $\delta W = \vec{F}.d\vec{\ell} = -dE_p$)

Concepts clés : énergie potentielle et force conservative

- L'énergie potentielle E_p résulte d'une force qui agit sur un objet. Comme une force provient toujours de l'interaction entre deux objets, E_p **est une propriété des particules qui interagissent**.
- L'énergie potentielle est l'énergie que possède un système physique en vertu **de sa position**.
- L'énergie potentielle est une **énergie stockée**, elle peut être convertie en énergie cinétique (voir la suite).
- L'énergie potentielle est **un scalaire**, elle peut être positive ou négative.
- Les forces associées à une énergie potentielle sont des **forces conservatives.**
- L'énergie potentielle, comme toute énergie, est toujours définie à une constante arbitrairement près. Nous ne mesurons expérimentalement que des différences d'énergie.

Nous venons de trouver l'expression de l'énergie potentielle associée à la force de rappel élastique. Pour le poids, nous avons immédiatement $E_p\left(z\right) = mgz + A$ ou A est une constante arbitraire quelconque avec l'axe $\left(Oz\right)$ orienté vers le haut. Résumons ces deux cas importants qu'il faut parfaitement connaître :

Force	Energie potentielle associée
Force de rappel élastique : $\vec{F}_{re} = -k\left(x - x_0\right)\vec{i}$	$E_p\left(x\right) = \frac{k}{2}\left(x - x_0\right)^2 + A$ $\left(A = 0 \text{ si } E_p = 0 \text{ à } x = x_0\right)$
Poids : $\vec{P} = -mg\vec{k}$	$E_p\left(z\right) = mgz + A \quad \left(\text{avec } z \text{ vers le haut}\right)$ $\left(A = 0 \text{ si } E_p = 0 \text{ à } z = 0\right)$

Il faut noter que les quatre interactions fondamentales de la nature dérivent toutes d'une énergie potentielle et son donc conservatives.

5.3 Trouver la force qui dérive d'une énergie potentielle si on connaît cette dernière

a) Cas unidimensionnel

On considère un travail infinitésimal. On se place pour l'instant à une dimension, par exemple suivant $\left(Ox\right)$. $\delta W = F_x\, dx = -dE_p\left(x\right)$ soit :

$$\boxed{F_x = -\frac{dE_p\left(x\right)}{dx}}$$

La force est donc l'opposée de la dérivée (spatiale) de l'énergie potentielle, c'est pour cela que l'on dit que la force dérive d'une énergie potentielle.

b) cas général en 3D

Cette fois $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ et l'énergie potentielle est une fonction des trois variables spatiales : $E_p\left(x,y,z\right)$. En généralisant ce qui a été fait dans le cas unidimensionnel, on peut écrire :

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}}$$

Une justification plus rigoureuse de ce résultat sera donné en électrostatique quand nous introduirons l'opérateur « gradient ».

$\frac{\partial E_p}{\partial x}$ est l'opérateur « dérivée partielle ». Cela signifie que l'on dérive $E_p\left(x,y,z\right)$ par rapport à la variable x en traitant les variables y et z comme des constantes. Nous allons beaucoup utiliser les dérivées partielles dans le cours de thermodynamique.

5.4 Energie mécanique et théorème de l'énergie mécanique

Soit une particule de masse m, animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen donné. Elle est soumise à des **forces conservatives** $\overrightarrow{F_c}$ et à des **forces non-conservatives** $\overrightarrow{F_{nc}}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique $W_{totale}\left(\sum \vec{F} = \overrightarrow{F_c} + \overrightarrow{F_{nc}}\right) = W_c\left(\overrightarrow{F_c}\right) + W_{nc}\left(\overrightarrow{F_{nc}}\right) = \Delta E_c$. On a vu que $W_{i\to f}\left(\overrightarrow{F_c}\right) = -\Delta E_p$ ce qui donne $W_{i\to f} = \Delta E_c + \Delta E_p$.

Par définition, on appelle **énergie mécanique** (notée E_m) la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$E_m \equiv E_c + E_p \quad (\text{Définition de l'énergie mécanique})$$

On arrive au résultat important connu sous le nom de **théorème de l'énergie mécanique** :

Théorème de l'énergie mécanique:

$$\boxed{\Delta E_m = W_{nc}}$$

La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces non conservatives qui lui est appliqué.

Il faut faire attention que, dans le théorème de l'énergie mécanique, seul le travail des forces non-conservatives intervient. Le travail des forces conservatives a été incorporé dans l'énergie potentielle.

On peut réécrire ce résultat en faisant apparaître la puissance des forces non-conservatives. Pour une variation infinitésimale $dE_m = dE_c + dE_p = \delta W_{nc} = P_{nc}\,dt$. On arrive à la forme dérivée du théorème de l'énergie mécanique :

Forme dérivée du théorème de l'énergie mécanique: $$\frac{dE_m}{dt} = P_{nc}$$

Si la particule n'est soumise qu'à des forces conservatives $W_{nc} = 0$. Ainsi $\Delta E_m = 0$. Cela signifie que l'énergie mécanique reste constante au cours du temps, il y a donc conservation de l'énergie mécanique.

Si $W_{nc} = 0 \Rightarrow \Delta E_m \equiv \Delta E_c + \Delta E_p = 0$

L'énergie mécanique d'une particule soumise seulement à des forces conservatives est conservée.

Nous verrons dans le cours de thermodynamique que la conservation de l'énergie mécanique n'est qu'un cas particulier du théorème fondamental de la conservation de l'énergie (un des plus importants de l'univers physique).

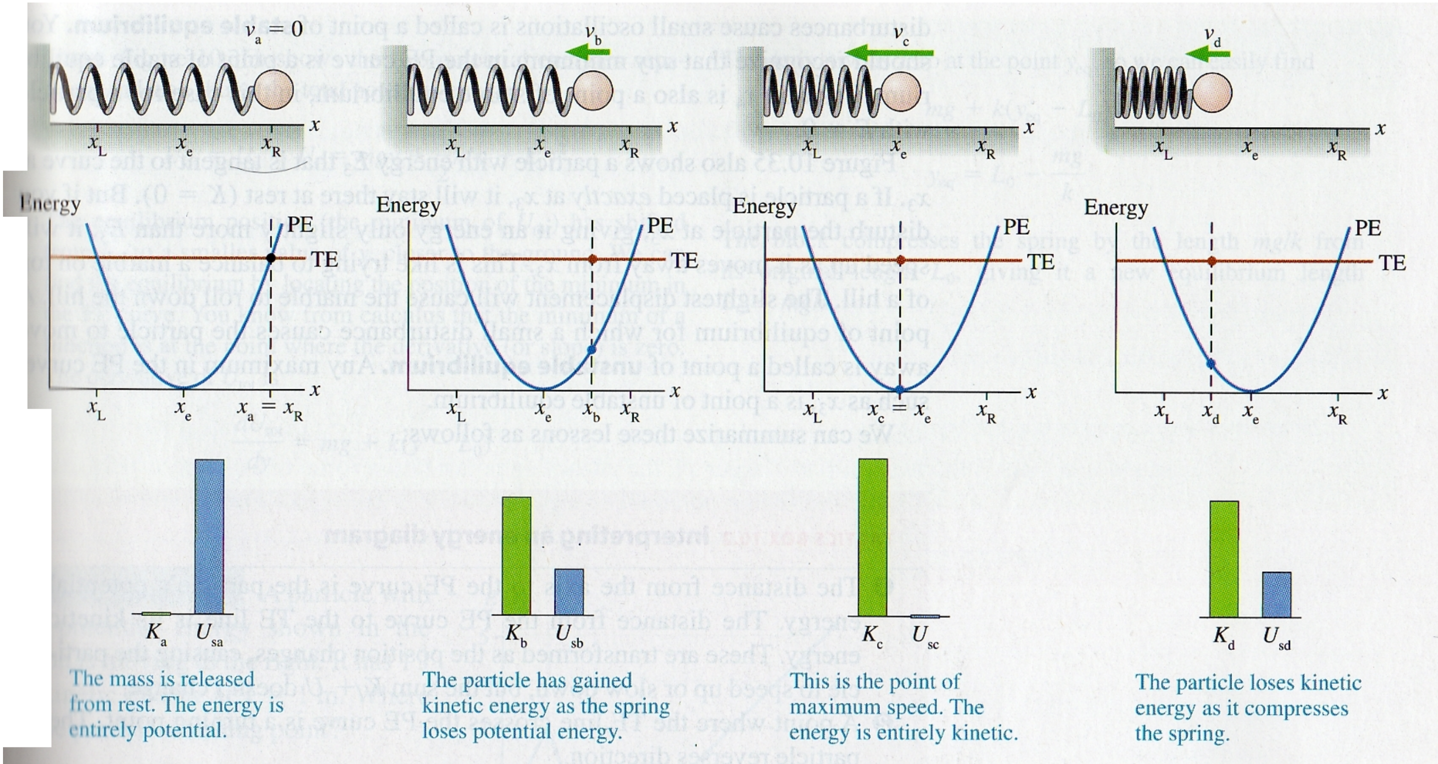


FIGURE 10.33 A four-frame movie of a mass oscillating on a spring.

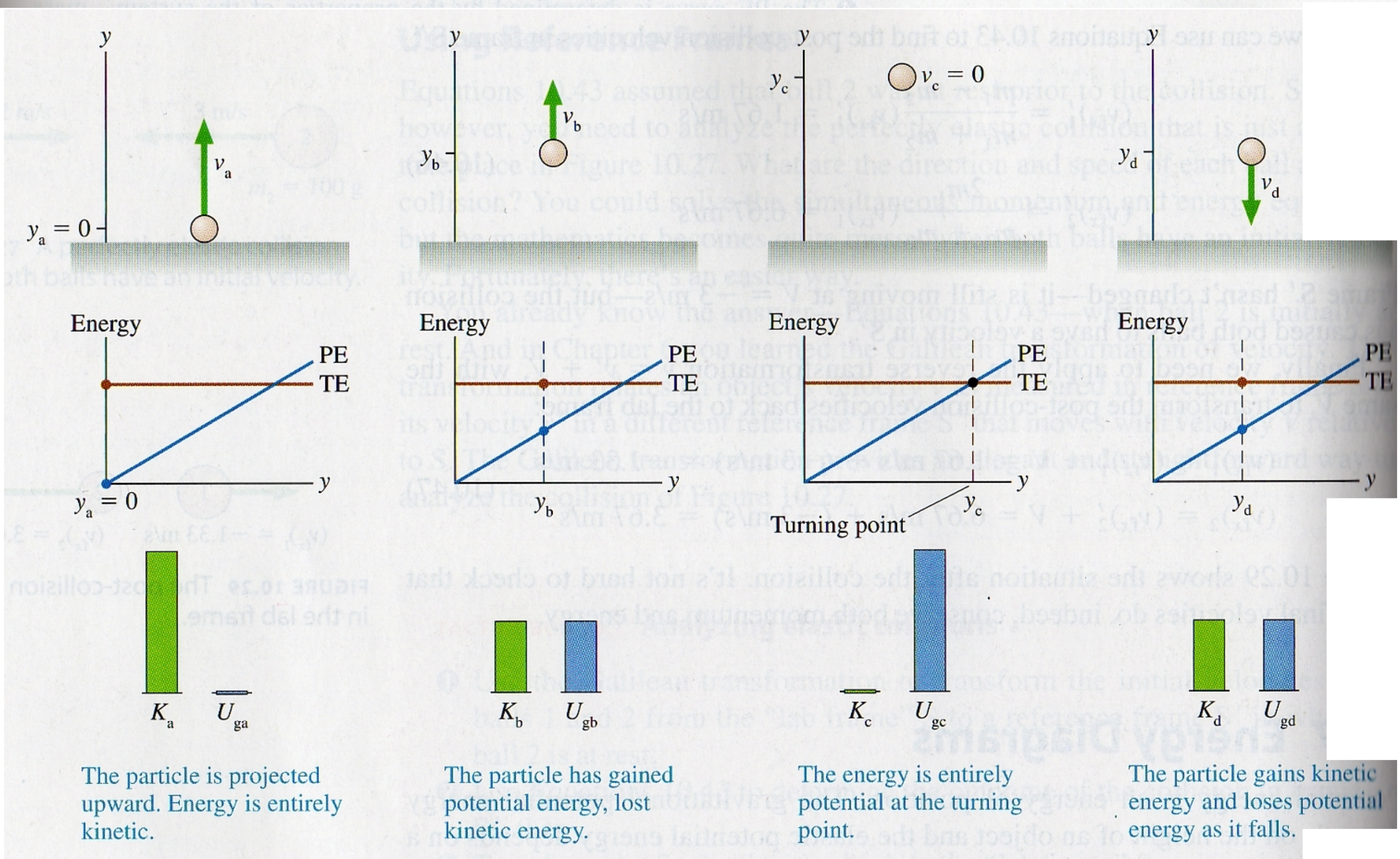


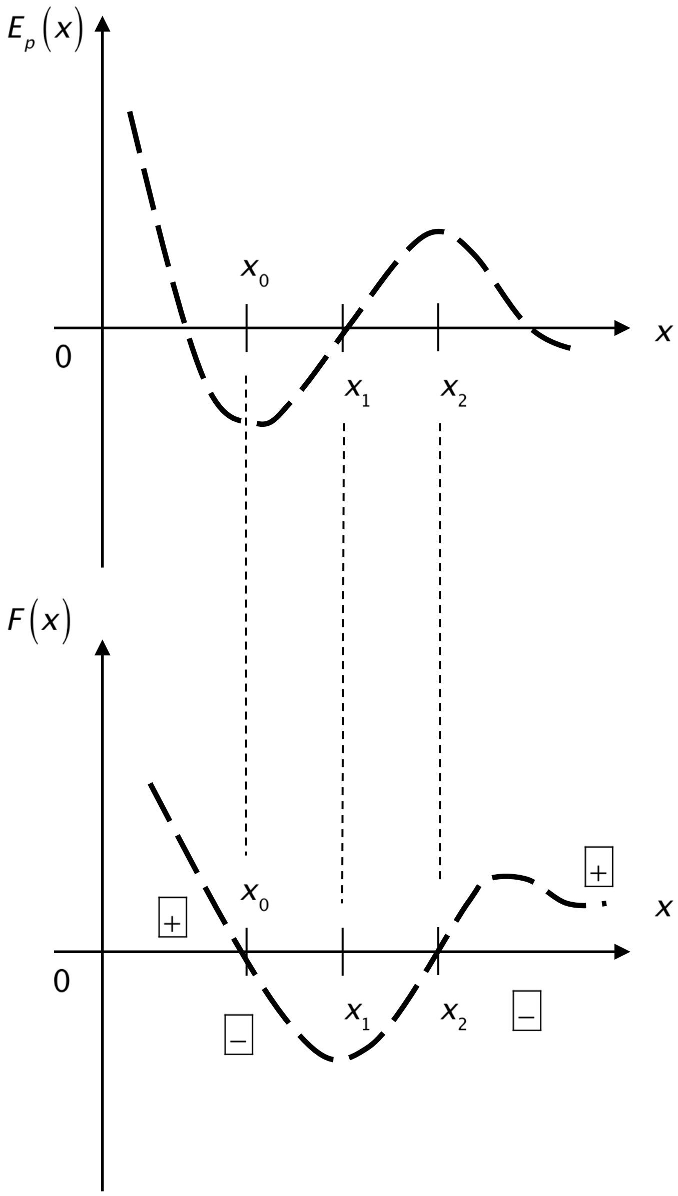
FIGURE 10.31 A four-frame "movie" of a particle in free fall.

Dans le premier exemple de la figure précédente, une particule est soumise à la seule force de rappel élastique. Dans le deuxième exemple, la particule est soumise à son seul poids. Dans les deux cas, seules des forces conservatives interviennent. Il y a conservation de l'énergie mécanique et échange permanent entre énergie potentielle et énergie cinétique.

5.5 Equilibre d'un point matériel soumis à une force conservative

On considère un problème à une dimension, par exemple suivant (Ox).

a) Diagramme d'énergie



La figure ci-contre représente l'énergie potentielle $E_p(x)$ à laquelle est soumise la particule.

La force conservative correspondante est donnée par $F(x) = -\dfrac{dE_p(x)}{dx}$.

b) Condition d'équilibre

On constate que pour x_0 et x_2, $F(x) = 0$. La particule est **en équilibre** ce qui est équivalent à la condition $\dfrac{dE_p(x)}{dx} = 0$. $E_p(x)$ est extrémale, minimale ou maximale.

d) Stabilité de l'équilibre

⇒ **L'équilibre est stable** si la force $F(x)$ a tendance à ramener la particule vers sa position d'équilibre.

⇒ **L'équilibre est instable** si la force $F(x)$ éloigne la particule de sa position d'équilibre.

- Pour $x = x_0$, $F(x)$ a tendance à **ramener** la particule en $x = x_0$ si on déplace légèrement la particule vers la gauche ou vers la droite. En $x = x_0$, $\left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0$.
- Pour $x = x_2$, $F(x)$ a tendance à **éloigner** la particule en $x = x_2$ si on déplace légèrement la particule vers la gauche ou vers la droite. En $x = x_2$, $\left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_2} < 0$.

En conclusion sur l'équilibre :

EQUILIBRE en $x = x_e \Leftrightarrow \dfrac{dE_p(x)}{dx} = 0$

Equilibre **STABLE** en $x = x_e \Leftrightarrow \left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} > 0$ (on parle de puits de potentiel)

Equilibre **INSTABLE** en $x = x_e \Leftrightarrow \left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} < 0$ (on parle de mont de potentiel)

VI – Mouvement d'une particule soumise à une force conservative

6.1 Intégrale première du mouvement

On considère toujours une particule soumise à une force conservative (ou plusieurs forces conservatives) et on travaille à une dimension, dans ce cas-là:

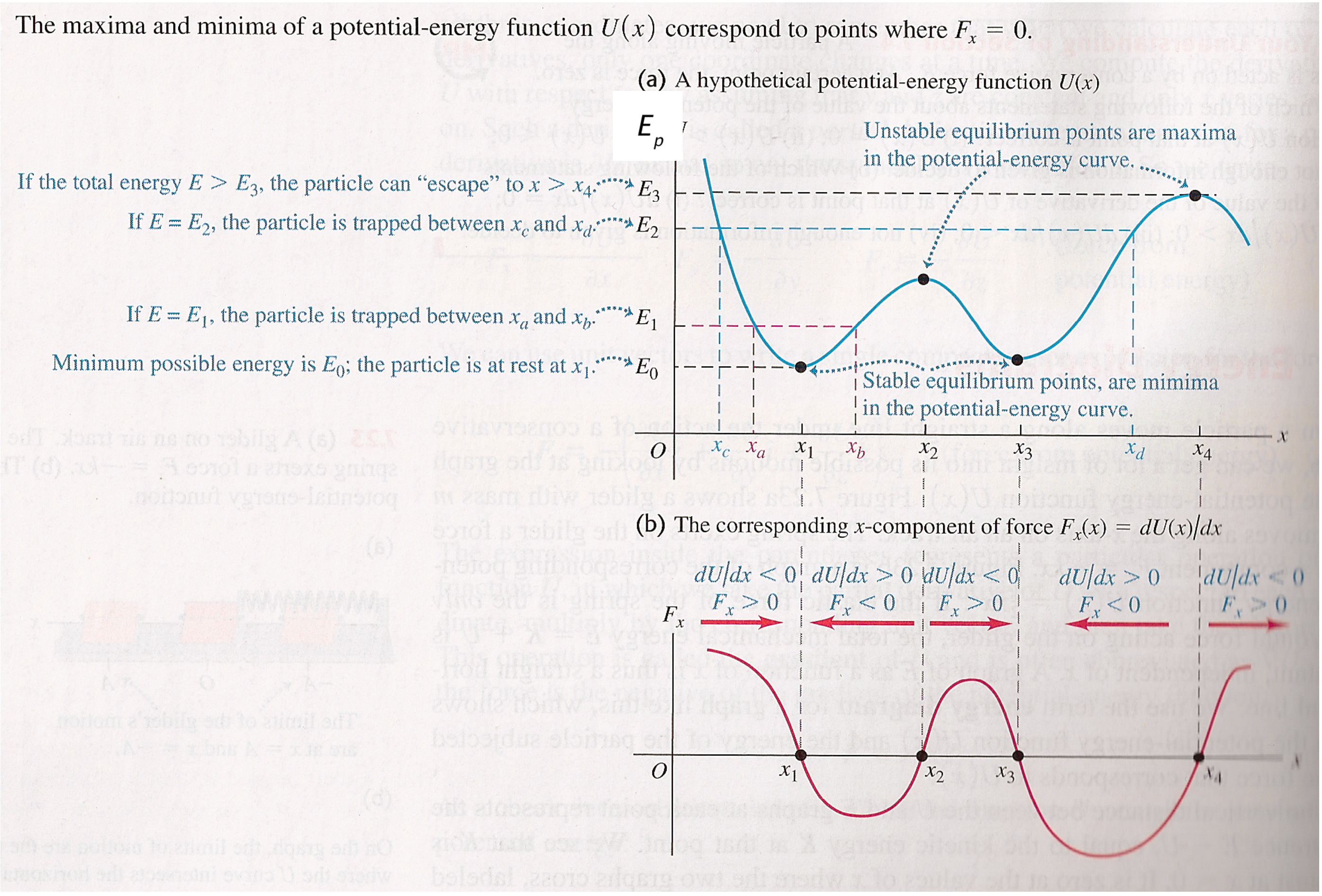
$$\boxed{E_m \equiv E_c + E_p = \text{constante}}$$

Cette équation est appelée **intégrale première du mouvement**. En effet, si on travaille à une dimension, $E_p = E_p(x)$ et $E_c = E_c\left(\dot{x}\right)$ donc $E_m = E_m\left(x, \dot{x}\right)$. Il s'agit d'une équation différentielle du mouvement qui, après une intégration plus ou moins compliquée, permet d'accéder à $x(t)$. Nous verrons en TD des exemples. Il faut bien avoir en tête qu'il n'y a pas que le principe fondamental de la dynamique qui permet d'avoir accès à l'équation du mouvement de la particule.

6.2 Domaine accessible à la trajectoire

On a toujours $E_m \equiv E_c + E_p = \text{constante} = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E_m - E_p(x)\right)} \geq 0}$. Le fait que la norme de la vitesse soit toujours positive impose que $E_m \geq E_p(x)$.

Les domaines accessibles sont ceux pour lesquels $v \geq 0$ soit $E_m \geq E_p$. Si $E_m = E_p$ alors $v = 0$.



Considérons la figure ci-dessus qui représente une énergie potentielle hypothétique à laquelle est soumise notre particule. Suivant la valeur constante de l'énergie mécanique de la particule, son domaine accessible doit vérifier $E_m \geq E_p$.

<u>Cas 0 :</u> $E_m = E_0$

La particule est contrainte de rester en $x = x_1$. Elle est au fond du puits de potentiel, on dit que la particule est dans un **ETAT LIE**.

<u>Cas 1 :</u> $E_m = E_1$

Le domaine accessible à la particule est $x_a \leq x \leq x_b$. Elle est piégée dans le puits potentiel, elle ne peut pas franchir la barrière de potentiel. On a encore un **ETAT LIE**.

Cas 2 : $E_m = E_2$

Le domaine accessible à la particule est $x_c \le x \le x_d$. Elle est piégée dans le puits potentiel, elle ne peut pas franchir la barrière de potentiel. On a encore un **ETAT LIE**.

Cas 3 : $E_m > E_3$

Le domaine accessible à la particule est $x_c \le x$. La particule peut s'échapper du puits de potentiel. L'énergie mécanique de la particule est trop grande pour confiner la particule dans le puits. On dit que la particule est dans un **ETAT DE DIFFUSION**.

La deuxième partie de la figure ci-dessus représente la force liée à l'énergie potentielle.

6.3 Exemples de diagrammes d'énergie potentielle

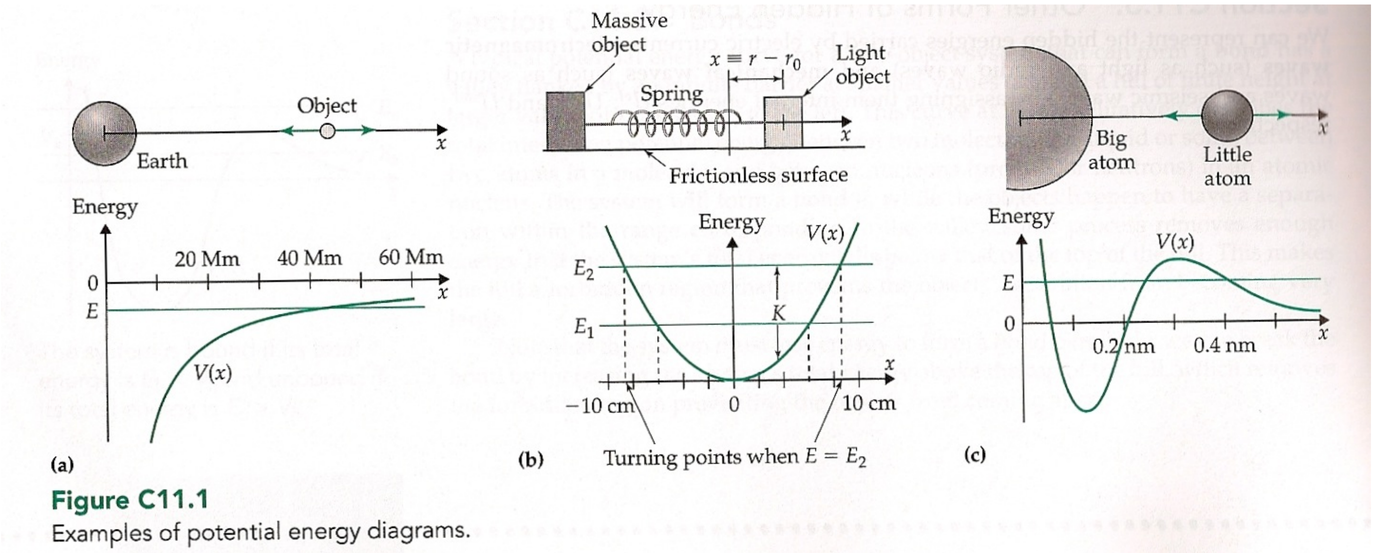


Figure C11.1
Examples of potential energy diagrams.

(Figures extraites de Six ideas that shaped physics, second edition, unit C par Thomas A. Moore, voir bibliographie sur le site web, il s'agit d'un excellent cours de physique en 6 tomes)

Les figures ci-dessous donnent des exemples de diagrammes d'énergie potentielle (notée ici V).

→ Figure a) : Energie potentielle d'origine gravitationnelle entre un objet et la Terre. L'allure de cette courbe sera justifiée plus tard (vous êtes déjà capables de justifier cette allure).

→ Figure b) : Energie potentielle de la force de rappel élastique d'un ressort (qui, à un niveau plus fondamental, a pour origine l'interaction électrostatique entre les atomes constituant le ressort).

→ Figure c) : Energie potentielle d'origine électrostatique entre deux atomes.

L'énergie potentielle est toujours associée à **l'interaction entre deux corps physiques ;** entre l'objet et la terre, entre une masse et un ressort ou encore entre les deux atomes. Dans notre cours de mécanique, nous n'étudions que des corps ponctuels (particules). C'est donc par un abus de langage (dangereux) que l'on parle de l'énergie potentielle du corps ponctuel étudié. Par exemple, quand on parle de l'énergie d'une particule de masse m dans le champ de gravité de la terre, on devrait parler de l'énergie potentielle du système Terre-particule.

Sur la figure ci-contre, déterminer le domaine accessible au système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique (E_1, E_2 et E_3).

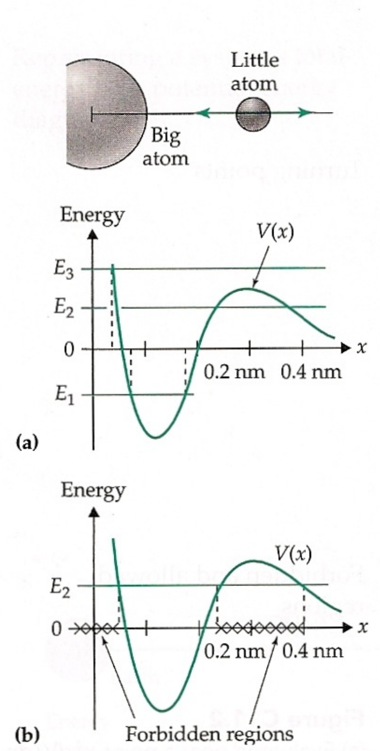


Figure C11.3
(a) Graph of a possible potential energy function for a system of two interacting atoms. (b) The system's forbidden regions when $E = E_2$.