

CHANGEMENT DE REFERENTIEL MECANIQUE NON GALILEENNE

« Placez votre main sur un poêle une minute et ça vous semble durer une heure. Asseyez vous auprès d'une jolie fille une heure et ça vous semble durer une minute. C'est ça la relativité »
Albert Einstein

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons nous intéresser à la **cinématique des changements de référentiels**. L'expression du vecteur vitesse d'un point matériel $\vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt}$ ainsi

que l'expression de son accélération $\vec{a} = \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2}$ dépendent du référentiel d'étude (O est un point fixe dans le référentiel d'étude). Nous allons établir le lien entre les vitesses et les accélérations exprimées dans deux référentiels différents.

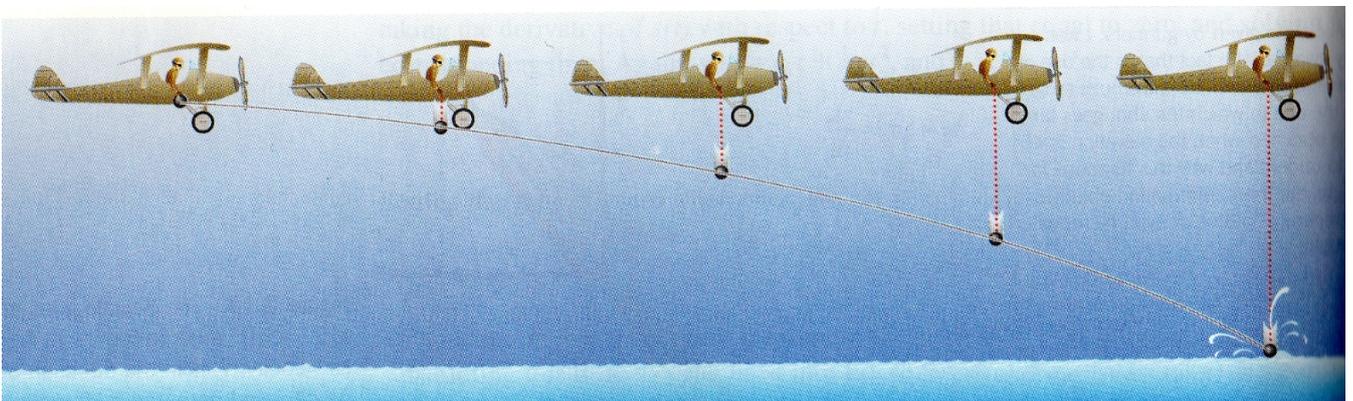
Dans une deuxième partie, nous étudierons les conséquences **dynamiques du problème de changement de référentiels**. Nous savons que la mécanique classique, au travers de la première loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique, a introduit des référentiels privilégiés ; les référentiels galiléens ou référentiels d'inertie. Notre objectif est d'étudier les modifications apportées au principe fondamental de la dynamique lorsque l'on se place dans un référentiel non galiléen.

I - Changement de référentiel : aspect cinématique

1.1 Position du problème et formalisme

Les changements de référentiel sont une question qui apparaît naturellement dans des situations de la vie courante.

Considérons par exemple la situation décrite par l'image ci-dessous. L'avion se déplace à vitesse constante par rapport au sol.

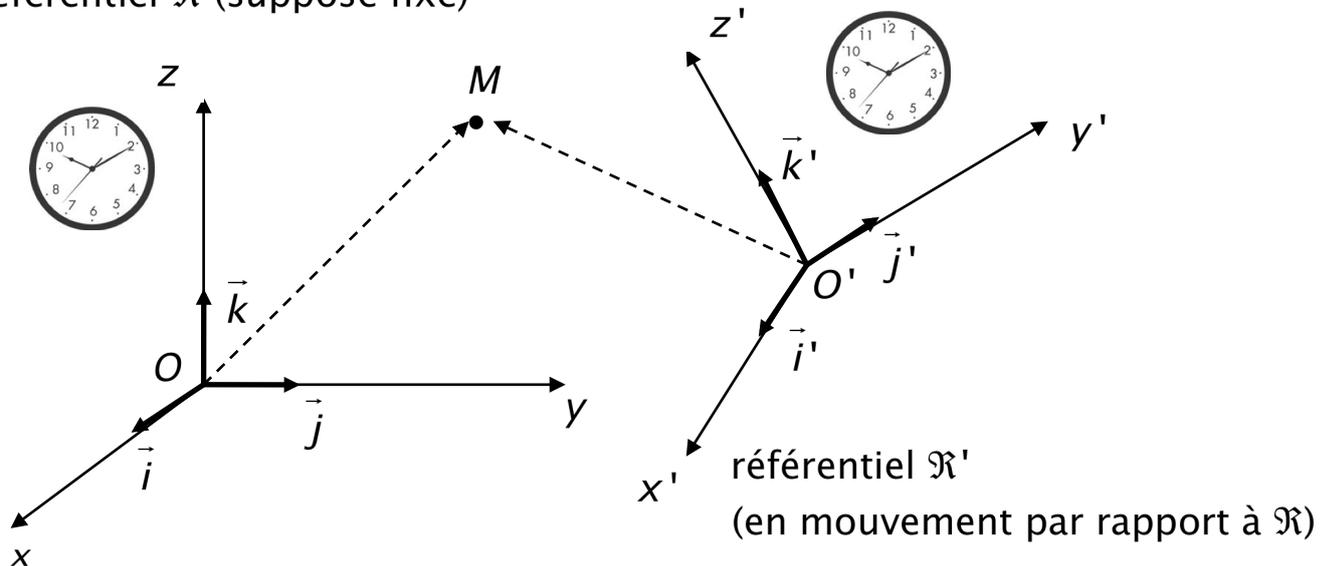


Pour l'observateur lié à la plage, le projectile décrit un mouvement parabolique (cf cours de dynamique du point). Par contre, pour l'aviateur lié à l'avion, le projectile décrit un mouvement

rectiligne vertical accéléré. Les deux observateurs constituent deux référentiels possibles, chacun d'eux ne verra pas la même trajectoire.

L'objet de ce paragraphe est d'établir, d'un point de vue cinématique, les lois permettant d'obtenir les expressions de la vitesse et de l'accélération dans un référentiel connaissant leur expression dans un autre référentiel et le mouvement du nouveau référentiel par rapport à l'ancien.

référentiel \mathfrak{R} (supposé fixe)



Nous allons utiliser les notations suivantes :

Le référentiel fixe :

Il s'agit du référentiel \mathfrak{R} , **considéré comme fixe**, constitué du repère d'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ auquel on lie une horloge qui mesure le temps. On notera (x, y, z) les coordonnées du point matériel M et t le temps associé.

Le référentiel en mouvement:

Il s'agit du référentiel \mathfrak{R}' , **considéré comme mobile**, constitué du repère d'espace $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ auquel on lie une horloge qui mesure le temps. On notera (x', y', z') les coordonnées du point matériel M et t le temps associé. Le temps étant absolu en mécanique classique (ce qui n'est pas le cas en mécanique relativiste), les deux horloges mesurent le même temps.



Les deux référentiels jouent des rôles parfaitement symétriques, le seul point important est l'existence d'un mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre.

1.2 Notion de point coïncidant

Il s'agit d'une notion un peu délicate que nous allons utiliser par la suite.

On appelle point coïncidant le point P du référentiel mobile, qui à l'instant t , coïncide avec le point M du référentiel fixe. **Le point P est fixe dans le référentiel mobile**, il lui est rigidement lié. En revanche le point M , **défini dans le référentiel fixe, est mobile**, il n'est pas au même endroit pour deux instants distincts.

Il faut noter qu'en général si P et M coïncident à l'instant t , il n'y a aucune raison qu'ils coïncident à un instant antérieur ou postérieur. Leurs trajectoires se croisent à l'instant t et se séparent juste après. Le point P est entraîné par le référentiel mobile auquel il est lié tandis que le point M reste fixe. Le point P coïncide avec un autre point M à l'instant $t + dt$.

Nous verrons des exemples par la suite.

1.3 Définitions

Nous allons par la suite distinguer plusieurs vitesses et plusieurs accélérations.

⇒ La vitesse (respectivement l'accélération) dans \mathfrak{R} notée $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}}$ (respectivement $\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}}$) est la vitesse (respectivement l'accélération) du point M étudiée dans le référentiel supposé fixe \mathfrak{R} .

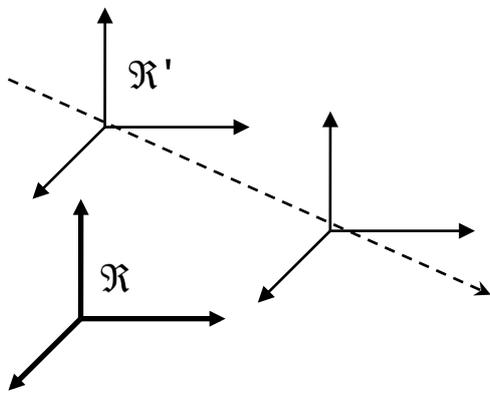
⇒ La vitesse (respectivement l'accélération) notée $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'}$ (respectivement $\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'}$) est la vitesse (respectivement l'accélération) du point M étudiée dans le référentiel mobile \mathfrak{R}' (par rapport à \mathfrak{R}).

⇒ La vitesse (respectivement l'accélération) **d'entraînement** notée $\vec{v}_e(M)$ (respectivement $\vec{a}_e(M)$) est la vitesse (respectivement l'accélération) du point coïncidant P étudiée dans le référentiel fixe \mathfrak{R} .

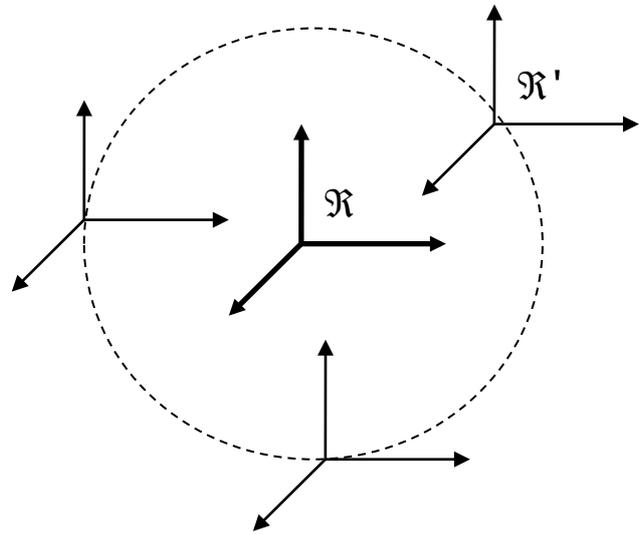
1.4 cinématique 1 : Mouvement de translation

a) Cadre de l'étude

Conformément au programme de PTSI, nous allons étudier le cas où le référentiel \mathfrak{R}' est en mouvement de translation par rapport au référentiel \mathfrak{R} . Cela signifie que, à chaque instant, les vecteurs de base \vec{i}', \vec{j}' et \vec{k}' gardent une direction fixe dans l'espace. Il y a deux types de translation comme cela est illustré sur la figure ci-dessous.



Translation rectiligne
(ex : les voitures les unes par rapport aux autres sur l'autoroute)



Translation circulaire
(ex : la grande roue)

b) Composition des vitesses (Démonstration des résultats au tableau)

$$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{v}(O')_{\mathcal{R}}$$

Identifions à présent chaque terme de cette relation.

$\Rightarrow \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ est la vitesse du point M dans le référentiel fixe \mathcal{R} .

$\Rightarrow \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}$ est la vitesse du point M dans le référentiel mobile \mathcal{R}' .

$\Rightarrow \vec{v}(O')_{\mathcal{R}}$ peut être analysé à l'aide du point coïncident. Si dans la relation encadrée précédente, on remplace le point M par le point coïncident P , on a $\vec{v}(P)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(O')_{\mathcal{R}} + \vec{v}(P)_{\mathcal{R}'}$. Or le point P est fixe dans le référentiel mobile \mathcal{R}' donc $\vec{v}(P)_{\mathcal{R}'} = 0$. Ainsi $\vec{v}(O')_{\mathcal{R}}$ est la vitesse du point

coïncidant P étudiée dans le référentiel fixe \mathfrak{R} , que l'on a notée $\vec{v}_e(M)$, la vitesse d'entraînement.

c) Composition des accélérations (Démonstration des résultats au tableau)

$$\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} + \vec{a}(O')_{\mathfrak{R}}$$

Identifions à présent chaque terme de cette relation.

$\Rightarrow \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}}$ est l'accélération du point M dans le référentiel fixe \mathfrak{R} .

$\Rightarrow \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'}$ est l'accélération du point M dans le référentiel mobile \mathfrak{R}' .

$\Rightarrow \vec{a}(O')_{\mathfrak{R}}$ peut être analysé à l'aide du point coïncidant. Si dans la relation encadrée précédente, on remplace le point M par le point coïncidant P , on a $\vec{a}(P)_{\mathfrak{R}} = \vec{a}(O')_{\mathfrak{R}} + \vec{a}(P)_{\mathfrak{R}'}$. Or le point P est fixe dans le référentiel mobile \mathfrak{R}' donc $\vec{a}(P)_{\mathfrak{R}'} = 0$. Ainsi $\vec{a}(O')_{\mathfrak{R}}$ est l'accélération du point coïncidant P étudiée dans le référentiel fixe \mathfrak{R} , accélération que l'on a notée $\vec{a}_e(M)$, l'accélération d'entraînement.

d) Cas particulier de la translation rectiligne uniforme

Dans ce cas, le référentiel relatif \mathfrak{R}' a un mouvement de translation rectiligne uniforme à vitesse \vec{V} . Dans ce cas $\vec{v}(O')_{\mathfrak{R}} = \vec{v}_e(M) = \vec{V}$ et $\vec{a}(O')_{\mathfrak{R}} = \vec{a}_e(M) = \vec{0}$. On obtient alors :

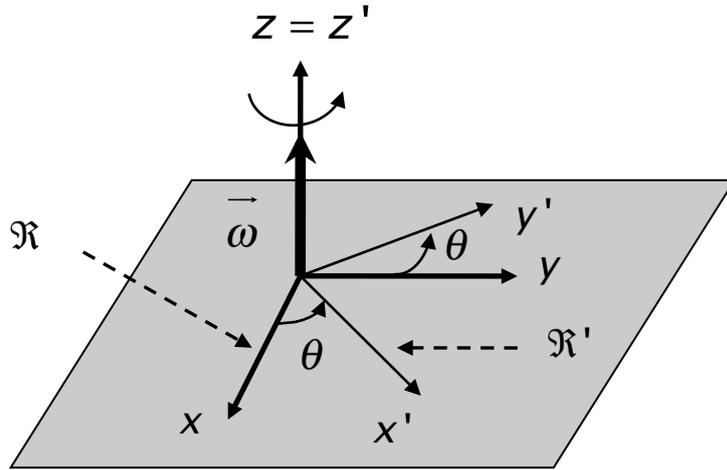
$$\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} + \vec{V} \text{ et } \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'}$$

Ces relations correspondent aux transformations dites de Galilée dont on va reparler.

1-5 Cinématique 2 : Mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe

a) Cadre de l'étude, vecteur rotation instantanée

On considère, dans le cadre du programme, le cas où le référentiel mobile \mathcal{R}' a un mouvement de rotation, à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$, par rapport au référentiel fixe \mathcal{R} autour de l'axe commun $z = z'$. On a donc $O = O'$ à chaque instant.



Il est commode, comme nous allons le voir, de définir le **vecteur vitesse de rotation instantanée** par (cf cours de SI):

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} = \omega \vec{k} = \text{vecteur de rotation instantanée}$$

On a $\vec{i}' = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$ et $\vec{j}' = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$.

$$\left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} \left. \frac{d\vec{i}'}{d\theta} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} (-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) = \dot{\theta} \vec{j}' = \dot{\theta} \vec{k}' \wedge \vec{i}' = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \text{ et de même : } \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}'.$$

On retiendra les relations suivantes qui vont nous être utiles par la suite :

$$\left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \text{ et } \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}'$$

Si la rotation est **uniforme** $\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$.

b) Composition des vitesses (Démonstration des résultats au tableau)

On obtient finalement :

$$\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Identifions à présent chaque terme de cette relation.

$\Rightarrow \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}}$ est la vitesse du point M dans le référentiel fixe \mathfrak{R} .

$\Rightarrow \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'}$ est la vitesse du point M dans le référentiel mobile \mathfrak{R}' .

\Rightarrow Le terme $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ peut être analysé à l'aide du point coïncidant. Si dans la relation encadrée précédente, on remplace le point M par le point coïncidant P , on a $\vec{v}(P)_{\mathfrak{R}} = \vec{v}(P)_{\mathfrak{R}'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$. Or le point P est fixe dans le référentiel mobile \mathfrak{R}' donc $\vec{v}(P)_{\mathfrak{R}'} = 0$. Ainsi $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$ est la vitesse du point coïncidant P étudiée dans le référentiel fixe ou absolu \mathfrak{R} , vitesse que l'on a notée $\vec{v}_e(M)$, la vitesse d'entraînement.

c) Composition des accélérations (Démonstration des résultats au tableau)

$$\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'}$$

Identifions à présent chaque terme de cette relation.

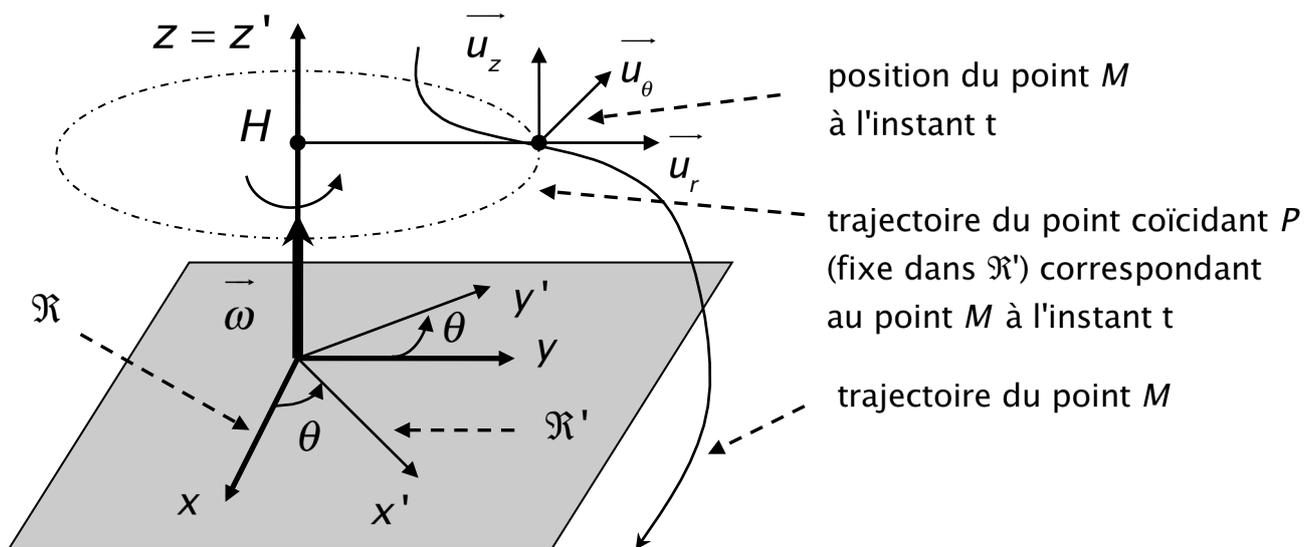
$\Rightarrow \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}}$ est l'accélération du point M dans le référentiel fixe \mathfrak{R} .

$\Rightarrow \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'}$ est l'accélération du point M dans le référentiel mobile \mathfrak{R}' .

\Rightarrow Le terme $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM})$ peut être analysé à l'aide du point coïncidant. Si dans la relation encadrée précédente, on remplace le point M par le point coïncidant P , on a $\vec{a}(P)_{\mathfrak{R}} = \underbrace{\vec{a}(P)_{\mathfrak{R}'}}_{=0} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(P)_{\mathfrak{R}'}}_{=0} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OP})$. Or le point P est fixe dans le référentiel mobile \mathfrak{R}' donc $\vec{a}(P)_{\mathfrak{R}'}$ et $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(P)_{\mathfrak{R}'}$ = 0. Ainsi $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM})$ est la vitesse du point coïncidant P étudiée dans le référentiel fixe ou absolu \mathfrak{R} , vitesse que l'on a notée $\vec{a}_e(M)$, l'accélération d'entraînement.

\Rightarrow Nous voyons apparaître un nouveau terme $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(M)$. Il s'agit de l'accélération de Coriolis nommée en l'honneur du physicien et mathématicien français (polytechnicien) (1792–1843). Ce nouveau terme a pour origine la rotation du référentiel mobile \mathfrak{R}' . Ce terme n'apparaît pas lorsque \mathfrak{R}' a un mouvement uniquement de translation par rapport à \mathfrak{R} . Nous reparlerons de ce terme et de ces effets dans la partie dynamique de ce chapitre. On notera souvent $\vec{a}_c(M) \equiv 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(M)$.

d) Expression de la vitesse d'entraînement et de l'accélération d'entraînement dans la base cylindrique locale associée au point M



Il y a deux façons de procéder. La première consiste à partir directement de $\vec{\omega} \wedge \overline{OM}$ et $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM})$ et d'exprimer \overline{OM} et $\vec{\omega}$ dans la base locale et de calculer les produits vectoriels. La deuxième approche consiste à utiliser le point coïncidant. C'est cette approche que nous allons

utiliser, elle est plus physique et va nous permettre de donner un sens plus concret à la notion de point coïncidant.

Soit le point P qui coïncide avec le point M à l'instant t . Le point P est fixe dans le référentiel \mathfrak{R}' . Il a donc une trajectoire circulaire de rayon HP dans le référentiel \mathfrak{R} comme cela est illustré sur le schéma ci-dessus.

La vitesse d'entraînement est donc la vitesse du point P qui décrit un cercle de rayon HM à la vitesse angulaire ω dans le référentiel absolu \mathfrak{R} .

$$\vec{v}_e(M) = \left. \frac{d\vec{OP}}{dt} \right|_{\mathfrak{R}} = \underbrace{\left. \frac{d\vec{OH}}{dt} \right|_{\mathfrak{R}}}_{= \vec{0}} + \left. \frac{d\vec{HP}}{dt} \right|_{\mathfrak{R}} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = r \frac{d(\vec{u}_r)}{dt} = r\omega\vec{u}_\theta \text{ avec } r = OM(t) = OP = \text{constante.}$$

$$\vec{a}_e(M) = \left. \frac{d^2\vec{OP}}{dt^2} \right|_{\mathfrak{R}} = \left. \frac{d^2\vec{HP}}{dt^2} \right|_{\mathfrak{R}} = r\dot{\omega}\vec{u}_\theta + r\omega \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \underbrace{r\dot{\omega}\vec{u}_\theta}_{= 0 \text{ car rotation uniforme}} - r\omega^2\vec{u}_r.$$

On retiendra donc les résultats suivants :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{OM} = r\omega\vec{u}_\theta \text{ et } \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = -r\omega^2\vec{u}_r$$

Il s'agit des expressions bien connues de la vitesse et de l'accélération d'un mouvement circulaire à vitesse angulaire constante (mouvement uniforme).

1-6 Cinématique 3 : Cas général (hors programme)

Nous avons étudié deux mouvements particuliers du référentiel mobile \mathfrak{R}' par rapport au référentiel fixe \mathfrak{R} : Mouvement de translation et Mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Bien entendu le référentiel \mathfrak{R}' peut avoir n'importe quel mouvement par rapport à \mathfrak{R} ; mouvement que l'on peut décomposer comme la somme d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation quelconque.

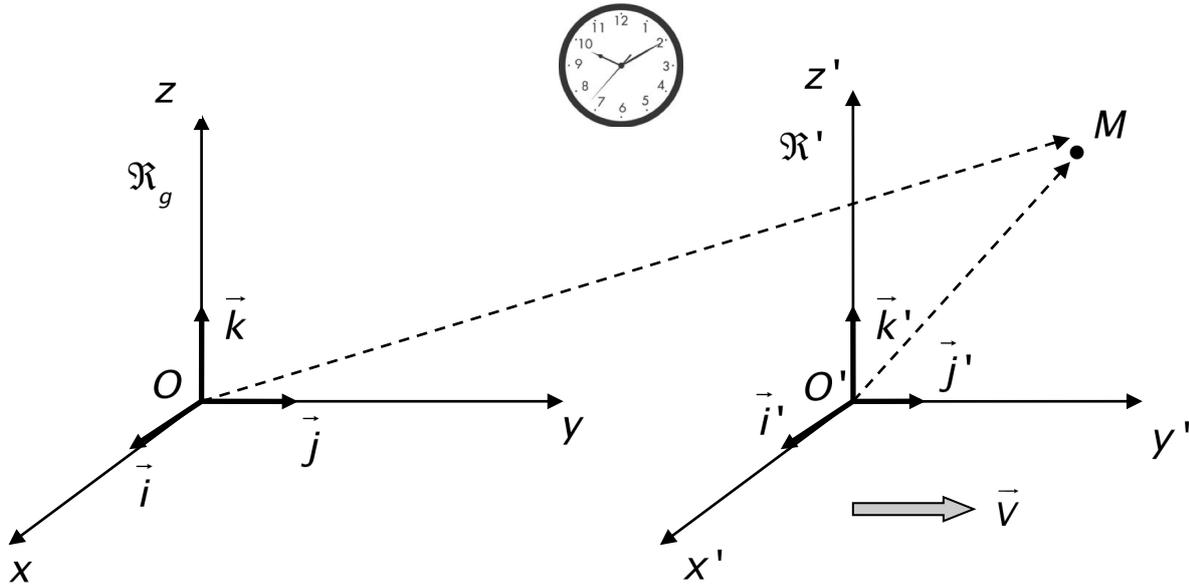
On obtient alors les résultats suivants qui ne sont pas au programme de PTSI :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} &= \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} + \vec{v}(O')_{\mathfrak{R}} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'M} \\ \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} &= \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} + \vec{a}(O')_{\mathfrak{R}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M}) \end{aligned}$$

Vous pouvez vérifier que ces relations générales redonnent les relations obtenues dans les cas particuliers étudiés précédemment.

II - Changement de référentiel : aspect dynamique

2.1 Transformation de Galilée



On considère que le référentiel fixe est un référentiel galiléen noté \mathfrak{R}_g . Il s'agit donc d'un référentiel dans lequel le principe fondamental de la dynamique est valable. Le référentiel en mouvement, \mathfrak{R}' , a un mouvement de translation uniforme à vitesse \vec{V} selon l'axe commun $y = y'$.

Nous cherchons à trouver le lien entre les coordonnées d'espace du point M dans \mathfrak{R}_g et dans \mathfrak{R}' . En mécanique classique, le **temps est absolu** donc $t = t'$.

$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = \vec{V}t + \vec{O'M}$. En projetant sur les trois axes, on obtient :

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y - Vt \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

Il s'agit des **transformations de Galilée**. Elles ne sont valables que si $\|\vec{V}\| \ll c$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide (domaine de validité de la mécanique classique). En dérivant une fois puis une autre fois les relations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} &= \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}_g} - \vec{V} \\ \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} &= \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}_g} \end{aligned}$$

On a déjà obtenu ces relations précédemment. Nous allons voir les conséquences de ces relations sur les lois de la dynamique dans la suite.

Note (hors programme)

Dans le cas plus général où $\|\vec{V}\| \approx c$, les transformations de Galilée doivent être remplacées par les **transformations de Lorentz** qui sont incorporées dans la théorie de la relativité restreinte formulée essentiellement par Albert Einstein (mais aussi par Henri Poincaré) :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \gamma(y - \beta ct) \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta y) \end{cases}$$

avec $\beta = \frac{V}{c} \leq 1$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1$. Ces relations sont plus complexes que celles de Galilée mais elles sont beaucoup plus riches physiquement et conceptuellement. On notera que le temps n'est plus absolu.

2.2 Principe de relativité galiléenne

On considère toujours les deux référentiels du paragraphe précédent. Soit $\vec{F} = \sum \vec{f}$ la somme des forces qui agissent sur le point M de masse m . Dans le référentiel galiléen \mathfrak{R}_g , la première loi de Newton s'applique par définition : $m\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}_g} = \vec{F}$. Cette relation est-elle encore valable dans le référentiel \mathfrak{R}' précédent ?

Avant d'aller plus loin, il faut savoir comment se transforment les forces quand on change de référentiel. La mécanique répond de façon très simple à cette problématique :

Dans la mécanique classique, on postule **l'invariance** des forces d'interaction dans un changement de référentiel quelconque.

Il s'agit d'un postulat qui ne peut être fondé que sur des vérifications expérimentales et sur la validité des conséquences physiques qu'il entraîne.

Dans \mathfrak{R}' , on a alors $m\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} = \vec{F}' = \vec{F}$ car $\vec{F}' = \vec{F}$ d'après le postulat précédent. De plus on a vu que $\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}_g} = \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'}$, ce qui donne $m\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} = \vec{F}$. Ce résultat implique que le référentiel \mathfrak{R}' est aussi galiléen car le principe fondamental de la dynamique peut y être appliqué et que le principe

fondamental de la dynamique a la même formulation dans les deux référentiels. De façon plus générale, cela entraîne que les lois de la mécanique ont même formulation dans les deux référentiels. Pour résumer, on peut noter :

Tout référentiel \mathfrak{R}' animé par rapport à un référentiel galiléen \mathfrak{R}_g d'un mouvement de **translation rectiligne uniforme** est lui-même galiléen.

Les lois de la mécanique ont la même formulation dans tous les référentiels galiléens ; il s'agit du principe de relativité galiléenne.

Ce dernier énoncé qui, dans le cadre de ce chapitre a été déduit des postulats de la dynamique, a été pressenti par Galilée. On peut encore lui donner la forme pratique suivante :

Le mouvement de translation rectiligne et uniforme d'un référentiel galiléen \mathfrak{R}_g' par rapport à un autre référentiel galiléen \mathfrak{R}_g ne peut pas être mis en évidence par une expérience de mécanique effectuée dans \mathfrak{R}_g' .

On peut s'assurer, au moins qualitativement, de la validité de cet énoncé en voyageant fenêtres fermées dans un compartiment de train. Si la vitesse est constante, et la voie rectiligne, rien dans le comportement des objets qui nous entourent ne permet de savoir si le train est en mouvement ou en repos.

Le principe de relativité de Galilée a une très grande importance théorique. La théorie de la relativité proposée par Einstein en 1905 repose sur une extension à toute la physique du principe que Galilée avait formulée dans le cadre restreint de la mécanique.

2.3 Référentiel non galiléen. Forces d'inerties

a) Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen

Soit une particule M de masse m , soumise à la force \vec{F} , la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel galiléen \mathfrak{R}_g s'écrit :

$$m\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}_g} = \vec{F}.$$

Soit maintenant un référentiel \mathfrak{R}' en mouvement quelconque par rapport à \mathfrak{R}_g . Dans \mathfrak{R}' , l'accélération de la particule $\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'}$ est telle que :

$$\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} = \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}_g} - \vec{a}_e(M) - \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'}}_{\text{noté } \vec{a}_c(M)}.$$

On peut donc écrire dans \mathfrak{R}' :

$$m \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} = \vec{F} - m \vec{a}_e(M) - m \vec{a}_c(M)$$

Puisque la dynamique de Newton postule l'invariance de la force dans un changement de référentiel quelconque, dans l'équation ci-dessus, \vec{F} représente aussi la force s'exerçant sur la particule dans \mathfrak{R}' . Ainsi si \mathfrak{R}' n'est pas galiléen, la relation encadrée ne garde pas une forme simple. On exprime cela en disant **que la relation fondamentale de la dynamique n'est pas invariante dans un changement de référentiel non galiléen**. Evidemment si \mathfrak{R}' est galiléen, alors $\vec{a}_e(M) = \vec{0}$ et $\vec{a}_c(M) = \vec{0}$.

b) Forces d'inertie

La relation encadrée précédente montre qu'un observateur lié à \mathfrak{R}' doit ajouter à \vec{F} deux termes pour décrire le mouvement de la particule (**c'est le point clé du chapitre !**):

Force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e(M) = \left\{ \begin{array}{l} -m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = m r \omega^2 \vec{u}_r : \text{cas de la rotation uniforme} \\ -m \vec{a}(O')_{\mathfrak{R}_g} : \text{cas de la translation} \end{array} \right\}$$

Force d'inertie de Coriolis

$$\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c(M) = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'}$$

Ces termes, homogènes à des forces, sont appelés **forces d'inertie** du fait de leur proportionnalité à la masse inerte m . D'une autre manière, on peut dire que la relation fondamentale de la dynamique sous sa forme galiléenne ($m \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}_g} = \vec{F}$) restera valable dans un référentiel non galiléen à condition d'inclure dans les forces appliquées également les forces d'inerties.

La question de l'interprétation physique des forces d'inertie est délicate. En effet, d'une part, les forces d'inertie ont des effets réels, d'autre part, elles se différencient des autres forces (force de gravitation, force électrostatique), en particulier, **elles ne respectent pas la troisième loi de**

Newton. Il est aujourd'hui admis que le modèle de la mécanique classique ne peut donner une interprétation satisfaisante des forces d'inerties. Seul le modèle de la relativité générale construit par Einstein (1916) peut le faire mais cela dépasse largement le cadre de notre programme.

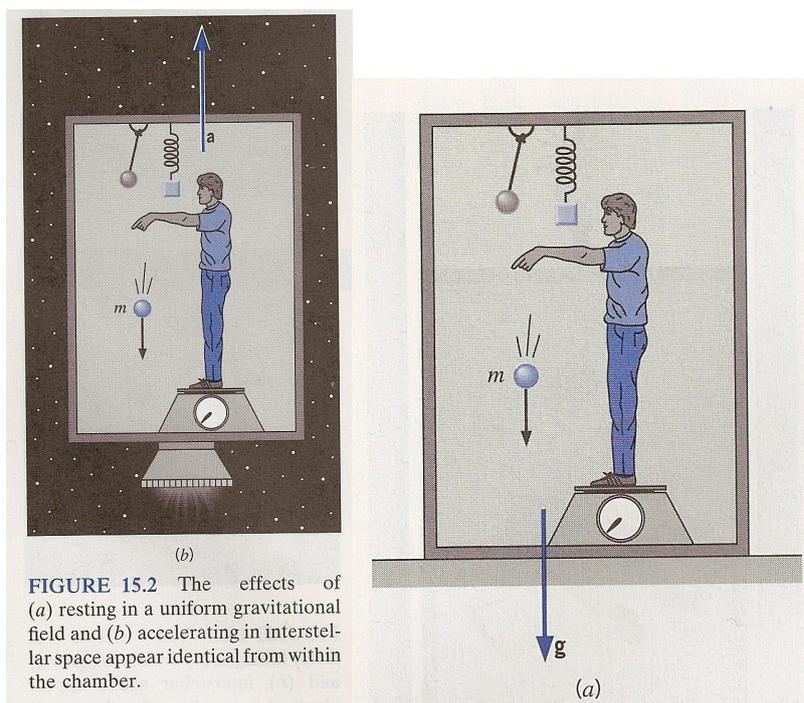
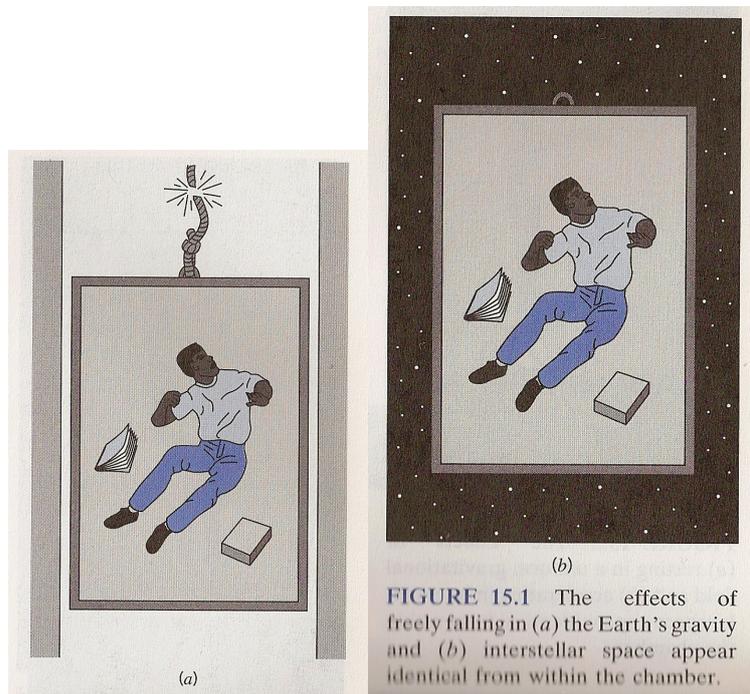
Pour que la force d'inertie de Coriolis, $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M) = -m2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'}$, soit présente, deux conditions doivent être satisfaites :

⇒ Il faut d'une part que le référentiel en mouvement ait **un mouvement de rotation** par rapport à un référentiel fixe, dans ce cas $\vec{\omega} \neq \vec{0}$.

⇒ Si la condition précédente est satisfaite, il faut encore que la particule ait **une vitesse non nulle dans le référentiel en mouvement**, c'est-à-dire $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} \neq \vec{0}$. Si la particule est au repos dans le référentiel en mouvement, $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$.

2.4 Exemples d'utilisation des forces d'inertie

a) Mouvements de translation : Oscillateur dans un ascenseur en accélération constante et pendule dans un train en accélération constante (Exercice au tableau)



b) Mouvements de rotation uniforme ; force d'inertie centrifuge, condition de l'équilibre (**Exercice au tableau**)

III - A la recherche d'un référentiel galiléen

3.1 Le référentiel terrestre (celui du laboratoire)

a) Description

La position d'un point P à la surface de la Terre est repéré par l'intersection de deux cercles : le **méridien** (cercle de centre O et passant par les pôles) et le **parallèle** (cf figure ci-contre).

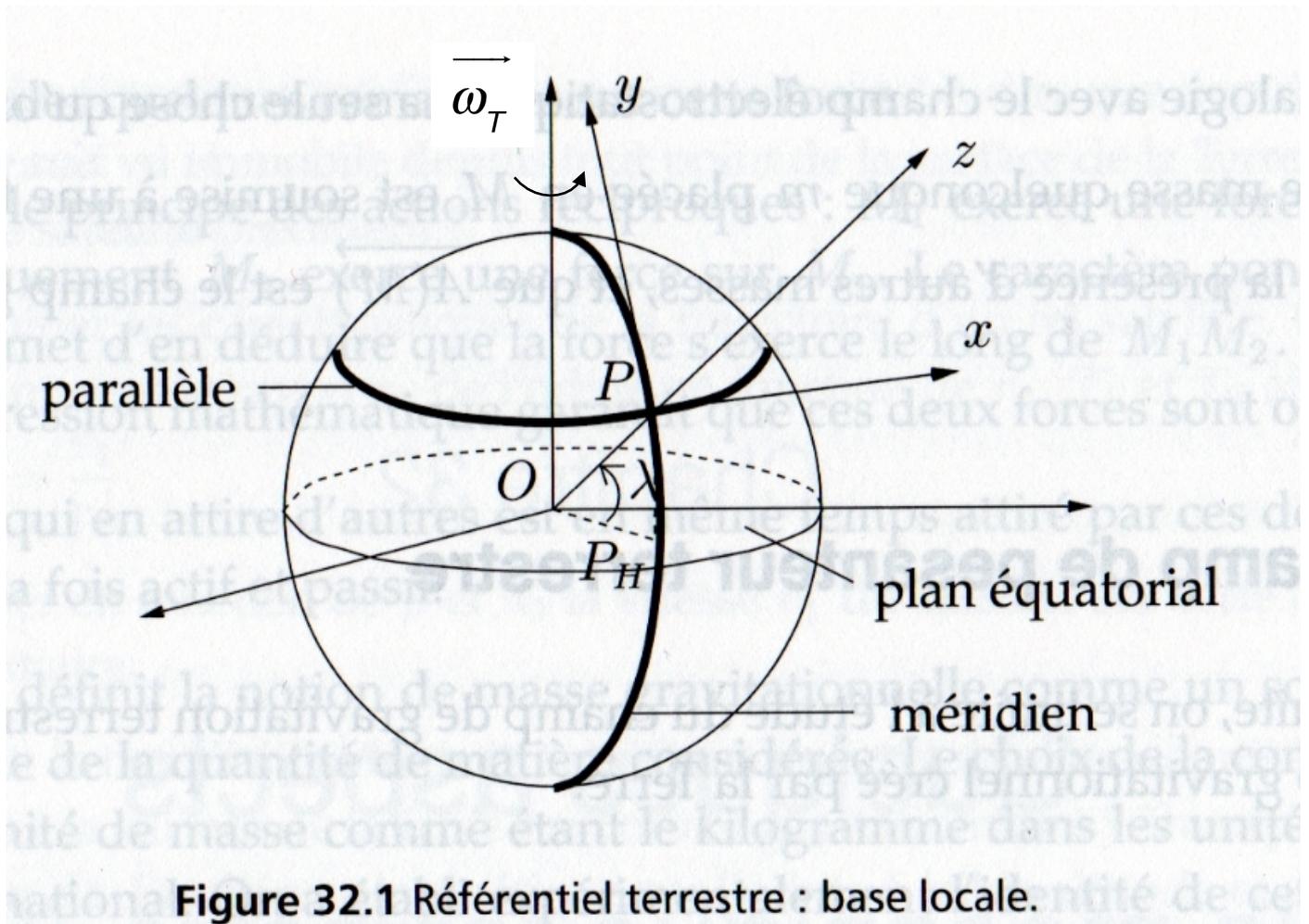
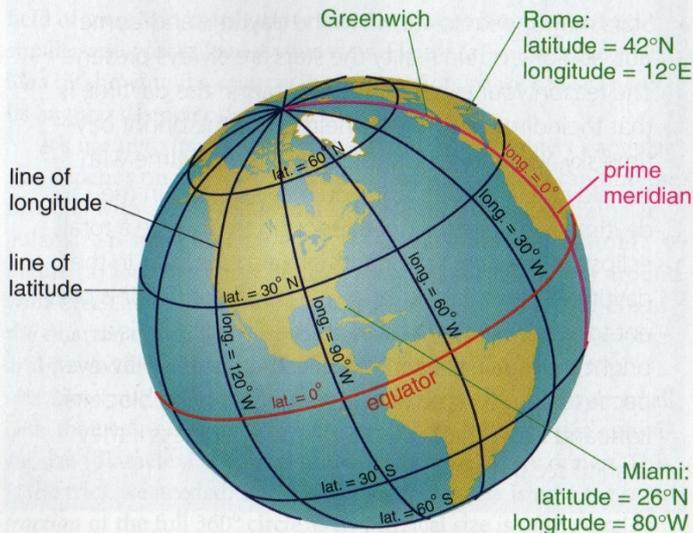


Figure 32.1 Référentiel terrestre : base locale.

La position du méridien est définie par la **longitude**. La longitude 0° est définie de façon arbitraire par le méridien qui passe par le village de Greenwich en Angleterre (cf figure ci-dessous).

La position d'un parallèle est définie par la **latitude** λ .



a Latitude measures angular distance north or south of the equator. Longitude measures angular distance east or west of the prime meridian, which passes through Greenwich, England.



b The entrance to the Old Royal Greenwich Observatory, near London. The line emerging from the door marks the prime meridian.

Figure 2.11 We can locate any place on Earth's surface by its latitude and longitude.

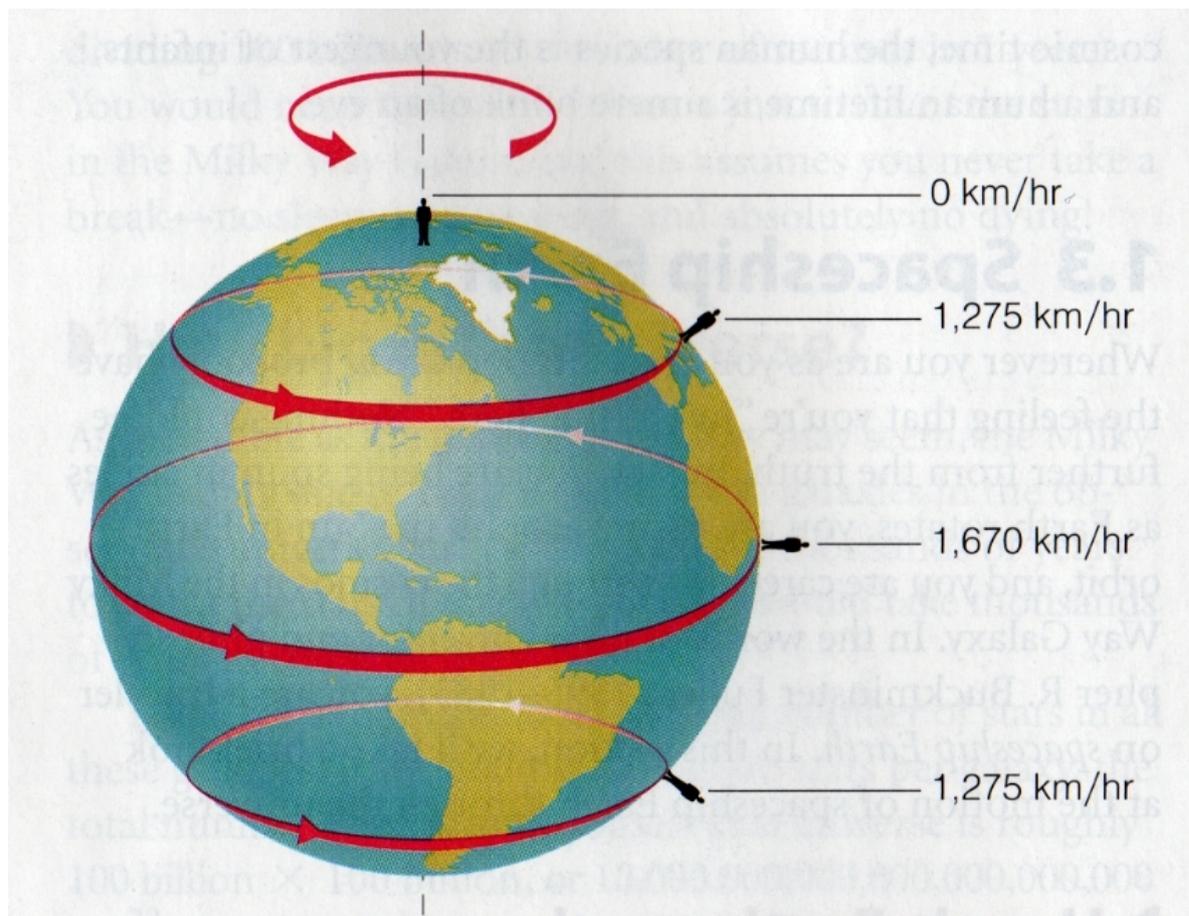


Figure 1.12 As Earth rotates, your speed around Earth's axis depends on your location: The closer you are to the equator, the faster you are traveling with rotation. Notice that Earth rotates from west to east—which is why the Sun appears to rise in the east and set in the west.

On peut attacher au point P un repère d'espace. L'axe Pz est choisi selon la verticale locale au point P , l'axe Px le long du parallèle passant par P , dirigé vers l'est et l'axe Py le long du méridien passant par P , dirigé vers le Nord géographique. Si l'on ajoute à ce repère d'espace un repère de temps (une horloge), on a défini le référentiel terrestre \mathfrak{R}_T .

b) Le référentiel terrestre est-il galiléen ?

En toute rigueur, la réponse est NON. En effet, la terre a un mouvement de rotation sur elle-

même à la vitesse angulaire $\omega_T = \frac{2\pi}{T_{sid}} = \frac{2\pi}{86164} = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$. T_{sid} est la période sidérale qui

est proche de 24 heures mais légèrement différente à cause du mouvement de la terre autour du soleil. Nous allons voir à présent les conséquences de cette rotation sur une particule de masse m .

c) Bilan des forces dans le référentiel terrestre

On considère une particule M de masse m dans le référentiel terrestre \mathfrak{R}_T . Elle est soumise :

1 - A la force de gravitation de la terre $m\vec{A}_T$. On néglige les forces de gravitation des autres

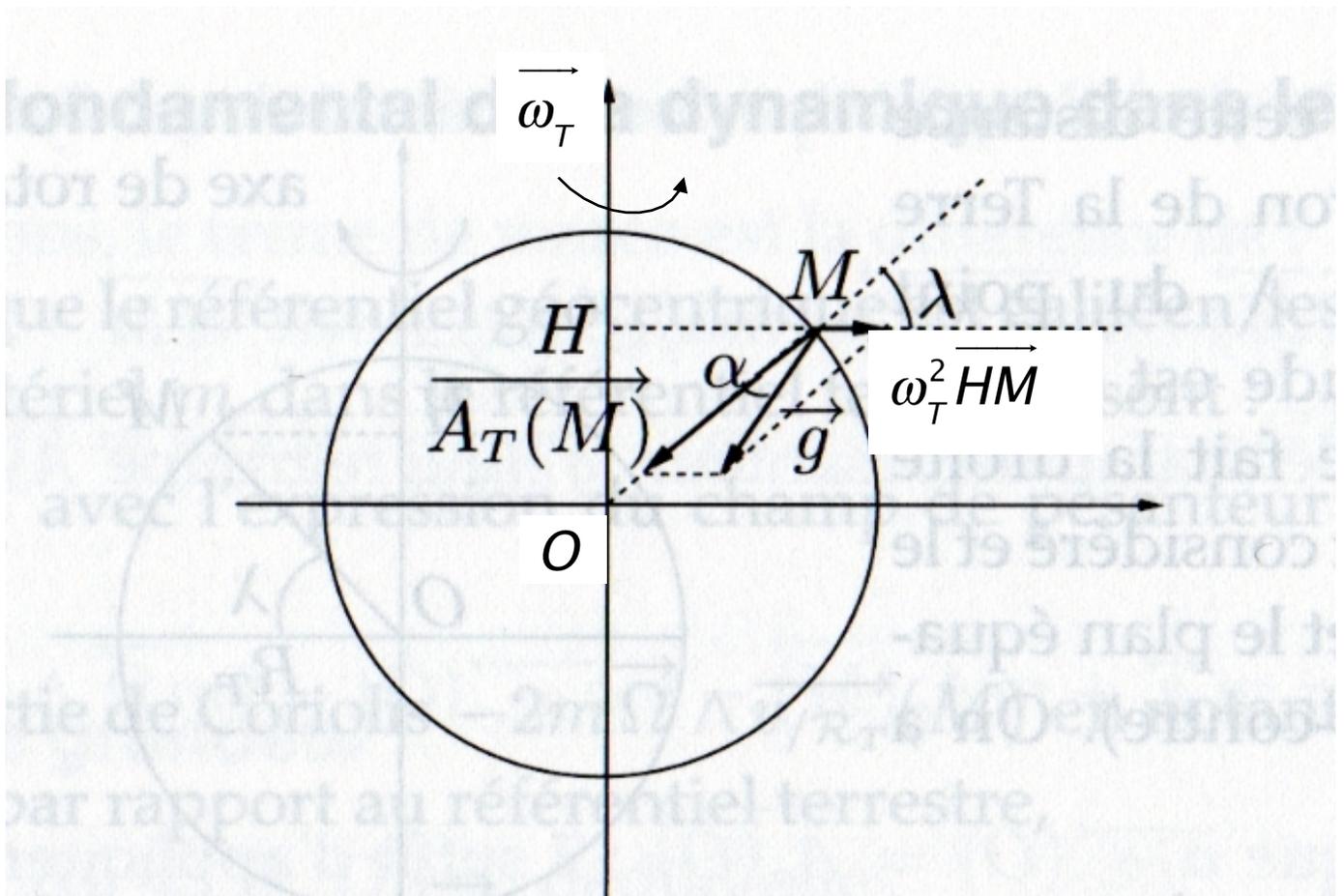


Figure 32.2 Orientation du champ de pesanteur.

astres ainsi que les autres forces susceptibles d'agir sur la particule (force magnétique, forces On On néglige les forces de gravitation des autres astres ainsi que les autres forces susceptibles d'agir sur la particule (force magnétique, forces électriques etc...).

Si M est à la surface de la terre, \vec{A}_T est dirigé du point M vers le centre O de la terre (cf figure ci-contre) et son module vaut (pour une terre parfaitement sphérique)

$$A_T(M) = \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{(6,67 \times 10^{-11}) \times (6 \times 10^{24})}{(6,4 \times 10^6)^2} = 9,77 \text{ m.s}^{-2}. \text{ Ce terme est homogène à une accélération.}$$

Nous verrons qu'il s'agit du terme prépondérant.

2 - **A la force d'inertie d'entraînement ou force centrifuge** $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M) = m\omega_T^2 \overline{HM}$. Dans cette situation, le référentiel relatif est le référentiel terrestre et le référentiel absolu le référentiel géocentrique qui est décrit en détail par la suite.

Si on se place à la latitude de 45° , $a_e(M) = \omega_T^2 HM = \omega_T^2 R_T \cos \lambda = 0,034 \text{ m.s}^{-2}$. Cette accélération d'entraînement varie donc de 0 à $0,034 \text{ m.s}^{-2}$ suivant la latitude. Elle est donc négligeable par rapport à la gravitation terrestre $A_T(M) = 9,77 \text{ m.s}^{-2}$. C'est pour cela que le référentiel terrestre peut être souvent considéré dans un premier temps comme un référentiel galiléen.

Cependant, la force d'inertie a pour effet que le poids \vec{P} de la particule M est défini en toute rigueur par $\vec{P}(M) = m\vec{g} = m(\vec{A}_T - \vec{a}_e)$ et n'est pas parfaitement dirigé vers le centre O de la terre. Il y a une légère inclinaison α , comme cela est indiqué sur le schéma ci-dessus. Vous pouvez calculer qu'à la latitude de 45° , $\alpha = 1,74 \times 10^{-3} \text{ rad} = 5'58''$.

3 - **A la Force d'inertie de Coriolis** $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M) = -2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}_T}$ où $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}_T}$ est la vitesse de la particule dans le référentiel en mouvement terrestre \mathfrak{R}_T . Si $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}_T} = \vec{0}$, c'est-à-dire si M est au repos dans \mathfrak{R}_T , cette force est nulle et n'a donc pas d'effets.

Considérons le cas simple où M est en chute libre suivant la verticale (définie en toute rigueur par la direction de $\vec{g} = \vec{A}_T - \vec{a}_e$). Le vecteur $-2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}_T}$ est dirigé suivant $-\vec{\omega}_T \wedge \vec{g} \approx -\vec{\omega}_T \wedge \overline{OM}$, c'est-à-dire suivant Px (cf figure du référentiel terrestre et utilisation de la règle de la main droite) qui est dirigé vers l'Est (la terre tourne d'Ouest en Est). Il s'agit du **phénomène de déviation vers l'est**. Ce phénomène est faible. Pour une hauteur de chute libre de 150 m, la déviation vers l'Est est de 3 cm. Cette expérience a été réalisée par Reich en 1833 dans un puits de mine pour éviter les perturbations comme le vent.

3.2 Le référentiel géocentrique

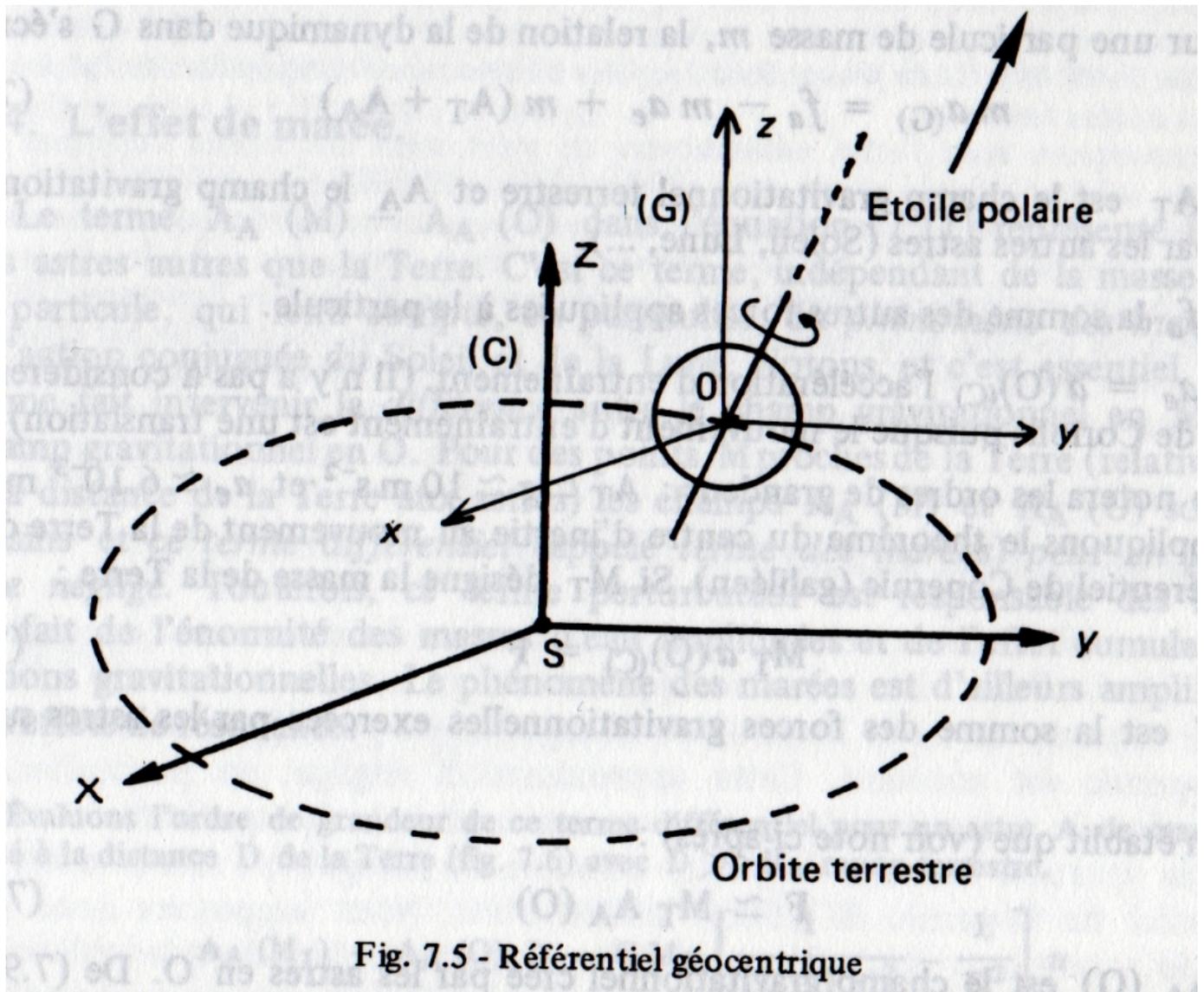


Fig. 7.5 - Référentiel géocentrique

Nous venons de voir que le référentiel terrestre n'est pas en toute rigueur galiléen à cause de la rotation de la terre sur elle-même. Il faut donc chercher un meilleur candidat pour le rôle de référentiel galiléen.

Un tel candidat peut-être le référentiel **géocentrique**. Ce dernier a pour origine le centre de la terre O , et trois axes orthogonaux qui pointent vers des étoiles lointaines pour que leur direction soit considérée comme fixe.

Ce référentiel n'est pas absolument galiléen car la Terre tourne autour du soleil. Le référentiel géocentrique possède donc une accélération d'entraînement par rapport au référentiel héliocentrique (ou de Kepler) que l'on précisera par la suite. On a $a_e(\text{terre}) = \omega^2 ST$ avec

$$\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ an}} = \frac{2\pi}{\pi \times 10^7 \text{ s}}$$

la vitesse de rotation angulaire de la terre autour du soleil et

$ST = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ la distance moyenne soleil-terre (la trajectoire étant légèrement elliptique).

Cela donne $a_e(\text{terre}) = 6 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$. Cette accélération est inférieure à l'accélération

d'entraînement due à la rotation de la terre sur elle-même ($3,4 \times 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$) et encore plus inférieure à l'accélération due à l'attraction gravitationnelle de la terre ($9,77 \text{ m.s}^{-2}$).

3.3 Le référentiel héliocentrique (ou de Kepler) et le référentiel de Copernic

Nous venons de voir que le référentiel géocentrique n'est pas en toute rigueur galiléen à cause de la rotation de la terre autour du soleil. Il faut, encore une fois, chercher un meilleur candidat pour le rôle de référentiel galiléen.

Un tel candidat peut-être le référentiel **héliocentrique (ou de Kepler)**. Ce dernier a pour origine le centre du soleil S , et trois axes orthogonaux qui pointent vers des étoiles lointaines pour que leur direction soit considérée comme fixe. Ces trois étoiles sont les mêmes que celles utilisées pour le référentiel géocentrique. En fait les axes du référentiel géocentrique et ceux du référentiel héliocentrique ont toujours la même direction (cf figure du référentiel géocentrique), le référentiel géocentrique a donc un **mouvement de translation de rotation** par rapport au référentiel héliocentrique.

On définit aussi le **référentiel de Copernic** qui, au lieu d'avoir pour origine le centre du soleil, a pour origine le centre de masse du système solaire. Ces deux référentiels sont très proches étant donné que presque toute la masse du système solaire a pour origine le soleil.

Ces référentiels sont-ils enfin les référentiels galiléens tant recherchés ? Eh bien non. En effet le système solaire est animé d'un mouvement de rotation par rapport au centre de notre galaxie (cf figure ci-contre), il possède donc une accélération d'entraînement.

3 4 Il n'existe pas de référentiel parfaitement galiléen dans l'univers

En effet, tout est mouvement par rapport à tout dans notre univers comme cela est illustré sur la figure ci-dessus. Toutes les galaxies de l'univers s'éloignent les unes des autres de façon accélérée à cause de l'expansion même de la structure de l'univers.

On ne peut donc définir des référentiels galiléens qu'à un certain degré d'exactitude, c'est une notion avant tout expérimentale. D'un point de vue théorique, la théorie de la relativité générale s'est affranchie de la notion de référentiel galiléen en décrivant les lois de la physique de façon locale. On peut donc dire qu'aucun point de l'univers n'est privilégié par rapport à un autre, il n'existe pas de référentiel absolu dans l'univers par rapport auquel on peut décrire tout mouvement.

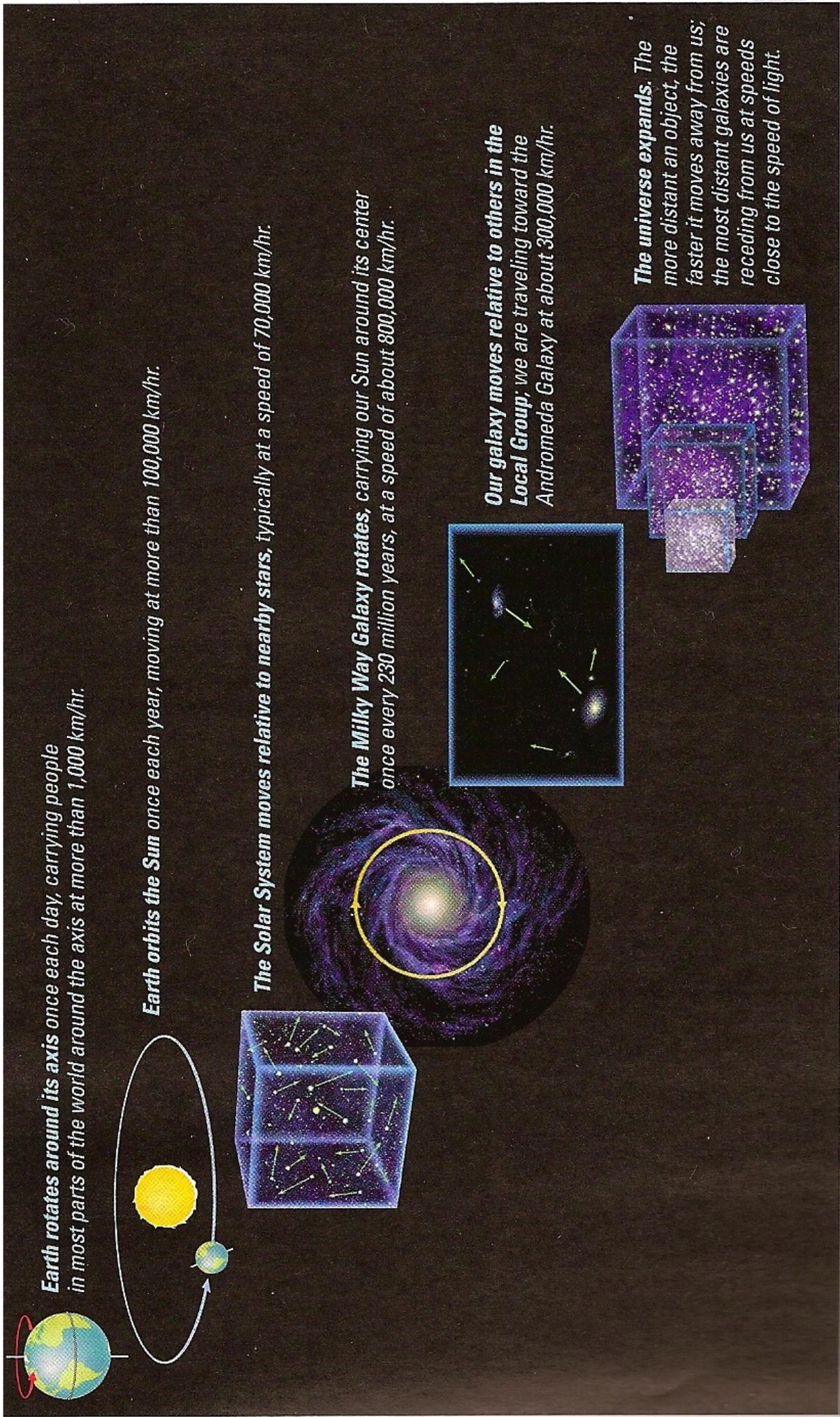


Figure 1.17 This figure summarizes the basic motions of Earth in the universe, along with their associated speeds.

ANNEXE : Force de Coriolis

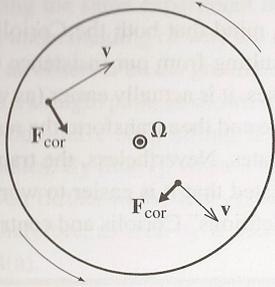
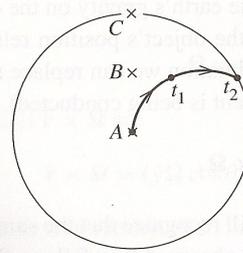
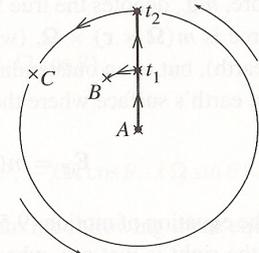


Figure 9.12 Overhead view of a horizontal turntable that is rotating counterclockwise relative to an inertial frame. The turntable's angular velocity Ω points up out of the picture. As seen by observers on the turntable, the two objects sliding on the table are subject to Coriolis forces $\mathbf{F}_{\text{cor}} = 2m\mathbf{v} \times \Omega$. Irrespective of the bodies' positions and velocities, the Coriolis force always tends to deflect the velocity to the right. (If the direction of rotation were clockwise, then Ω would be into the page and the Coriolis force would tend to deflect moving objects to the left.)



(a) As seen in rotating frame



(b) As seen in non-rotating frame

Figure 9.14 (a) Three observers A , B , and C are in a line on a rotating turntable, with A at the center and C at the perimeter. Observer A kicks a puck toward B and C , but because of the Coriolis force the puck veers to the right and misses B and C . (b) The same experiment as seen by an observer on the ground. In this frame, the puck travels in a straight line, but by the time t_1 when it reaches the radius of B , observer B has moved to the left. By the time t_2 when the puck reaches the perimeter, C has moved even further to the left.

