ONDES : SUPERPOSITION

«La musique met l'âme en harmonie avec tout ce qui existe.»
Oscar Wilde (1854-1900)

I – Le principe de superposition

Une des propriétés la plus basique des ondes est la possibilité pour deux ondes de se combiner en une seule onde dont la perturbation résultante est donnée par le **principe de superposition**.

Principe de Superposition

Quand une ou plusieurs ondes sont simultanément présentes en un point de l'espace, à un instant donnée, la perturbation résultante du milieu, en ce point et à ce même instant, est la somme des perturbations de chaque onde individuelle. D'un point de vue mathématique, la fonction d'onde totale est la somme des fonctions d'onde individuelle :

$$S_{tot}(x,t) = S_1(x,t) + S_2(x,t) + \ldots = \sum_i S_i(x,t)$$

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser uniquement à la **superposition de deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence**. On parle alors de **l'INTERFERENCE** de deux ondes. Deux cas seront étudier :

⇒ Les deux ondes se propagent dans la même direction.

⇒ Les deux ondes se propagent dans des directions opposées, on obtiendra dans ce cas là une **ONDE STATIONNAIRE**.

II – Interférence de deux ondes de même fréquence

2.1 Mise en place du problème

Dans la figure suivante, on considère deux haut-parleurs qui émettent chacun une onde acoustique de **même fréquence et de même amplitude dans la même direction le long de l'axe x positif**. Nous cherchons à déterminer ce qu'il se passe quand les deux ondes vont se superposer en un point de détection quelconque comme indiqué sur la figure.

Chaque fonction d'onde (la perturbation acoustique associée à chaque haut-parleur) peut s'écrire mathématique de la façon suivante :

$$S_1(x_1,t) = A\sin(kx_1 - \omega t + \phi_{10})$$
$$S_2(x_2,t) = A\sin(kx_2 - \omega t + \phi_{20})$$

$\Rightarrow$ Les deux ondes ont le même nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ et la même pulsation $\omega = 2\pi f$.

$\Rightarrow$ ϕ_1 et ϕ_2 sont les **phases** des ondes.

$\Rightarrow$ ϕ_{10} et ϕ_{20} sont les **phases à l'origine** des ondes et sont caractéristiques de la source et non pas du milieu de propagation. La figure 21.20 montre trois photos à l'instant $t = 0$ d'ondes émises par des sources avec des phases à l'origine différentes. **La phase à l'origine nous indique ce que la source de l'onde fait à l'instant $t = 0$.**

2.2 Différence de phase, différence de marche

Pour comprendre le phénomène d'interférence, il faut se focaliser sur la phase des ondes et plus particulièrement la différence entre les deux phases ϕ_1 et ϕ_2 appelé la **différence de phase** et noté $\Delta\phi$. La lettre grecque delta est universellement utilisé pour indiquer la différence entre deux grandeurs de même nature.

$$\Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1 = (kx_2 - \omega t + \phi_{20}) - (kx_1 - \omega t + \phi_{10})$$
$$= k(x_2 - x_1) + (\phi_{20} - \phi_{10})$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \Delta\phi_0$$

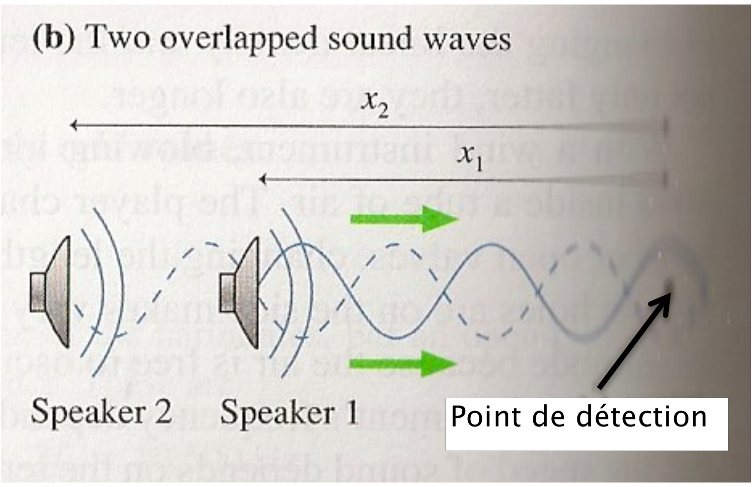
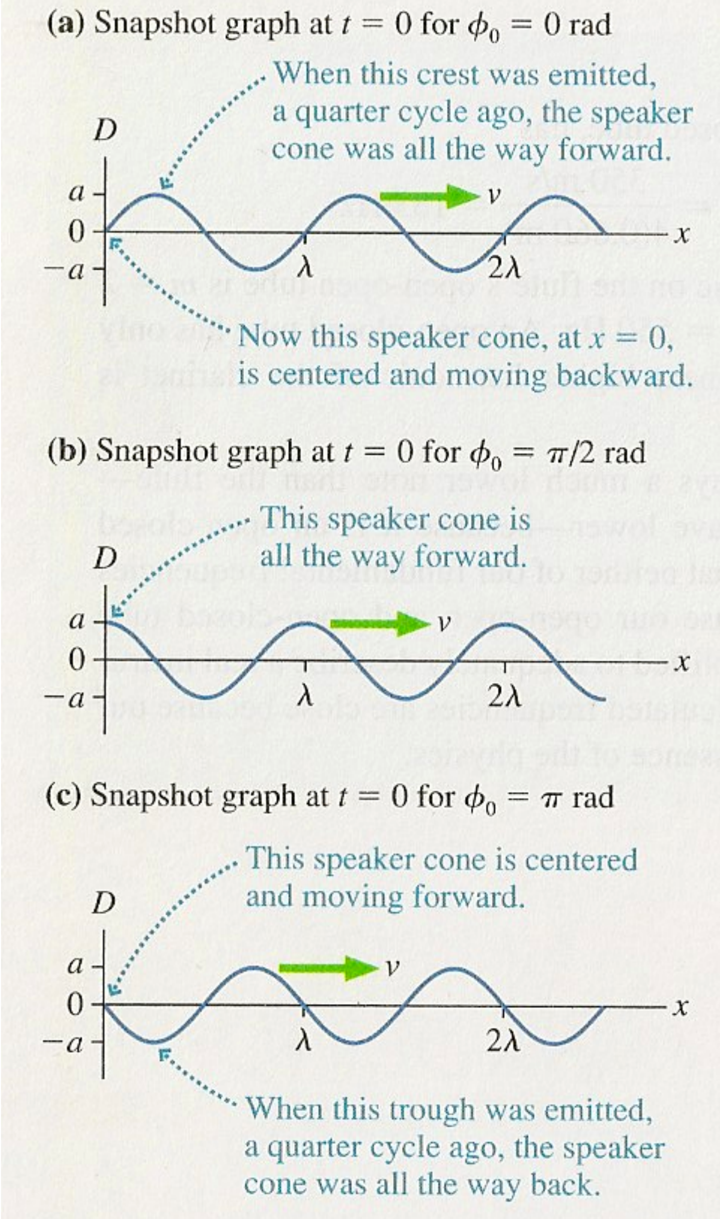


FIGURE 21.20 Waves from three sources having phase constants $\phi_0 = 0$ rad, $\phi_0 = \pi/2$ rad, and $\phi_0 = \pi$ rad.



On retiendra donc le résultat donnant la différence de phase entre deux ondes de même fréquence :

Différence de phase

$$\Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \Delta\phi_0$$

On peut voir que la différence de phase à deux contributions :

⇒ $\Delta x = x_2 - x_1$, la distance entre les deux sources, est nommée la **différence de marche**. Elle correspond à la distance supplémentaire parcourue par l'onde 2 par rapport à l'onde 1 au point où les deux ondes vont se combiner.

⇒ $\Delta\phi_0 \equiv \phi_{20} - \phi_{10}$, **la différence de phase à l'origine entre les deux sources**. Si les deux sources sont identiques, ce que l'on va souvent considérer, on aura alors tout simplement $\Delta\phi_0 = 0$.

2.3 Fonction d'onde résultante : interférences constructives et interférences destructives

Regardons de plus près la superposition de deux ondes de même amplitude et de même pulsation. La perturbation totale du milieu est donné par la somme des deux fonctions d'onde individuel :

$$S_{tot} = A\sin\left(kx_1 - \omega t + \phi_{10}\right) + A\sin\left(kx_2 - \omega t + \phi_{20}\right).$$

En utilisant la relation trigonométrique $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, on obtient :

$$S_{tot} = \underbrace{\left[2A\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\right]}_{\text{amplitude}}\sin\left(kx_{moy} - \omega t + \left(\phi_0\right)_{moy}\right)$$

où $\Delta\phi$ est la différence de phase, $x_{moy} = \left(x_1 + x_2\right)/2$ la distance moyenne par rapport au deux sources et $\left(\phi_0\right)_{moy} = \left(\phi_{10} + \phi_{20}\right)/2$ la moyenne des phases à l'origine des deux sources. On constante donc que S_{tot} à la forme d'une onde progressive harmonique avec pour amplitude :

$$\boxed{\text{amplitude} = \left|2A\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\right|}$$

⇒ L'amplitude de l'onde résultante maximale vaut $2A$ quand $\cos\left(\Delta\phi/2\right) = \pm 1$ c'est-à-dire lorsque :

$$\Delta\phi = n \times 2\pi \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad \text{soit} \quad \Delta\phi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$$

Dans ce cas là, on parle **d'interférence constructive** et on dit que **les ondes sont en phase**. Pour deux sources identiques $\Delta\phi_0 = 0$, les interférences constructives se produisent pour :

$$\Delta x = n \times \lambda \quad \text{soit} \quad \Delta x = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots .$$

Deux sources identiques produisent des interférences constructives quand leur différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde. Physiquement comme cela est illustré sur la figure 21.21 (a), les ondes sont en phases, leurs maximums sont décalés d'une longueur d'onde, ils se superposent, les ondes se « renforcent » pour produire une onde résultante d'amplitude plus importante.

$\Rightarrow$ L'amplitude de l'onde résultante minimale vaut 0 quand $\cos(\Delta\phi/2) = 0$ c'est-à-dire lorsque :

$$\Delta\phi = (2n+1) \times \pi \quad \text{soit} \quad \Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$$

Dans ce cas là, on parle **d'interférences destructives** et on dit que **les ondes sont en opposition de phase**. Pour deux sources identiques $\Delta\phi_0 = 0$, les interférences constructives se produisent pour :

$$\Delta x = (n + 1/2) \times \lambda \quad \text{soit} \quad \Delta x = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, 7\lambda/2, \dots .$$

Deux sources identiques produisent des interférences destructives quand leur différence de marche vaut un demi entier de la longueur d'onde. Physiquement comme cela est illustré sur la figure 21.23 (a), les ondes sont en opposition de phases, le maximum de l'une correspond au minimum de l'autre car elles sont décalés d'un multiple d'une demi longueur d'onde, les ondes se « détruisent » pour produire une onde résultante d'amplitude nulle.

FIGURE 21.21 Constructive and destructive interference of two waves traveling along the x-axis.

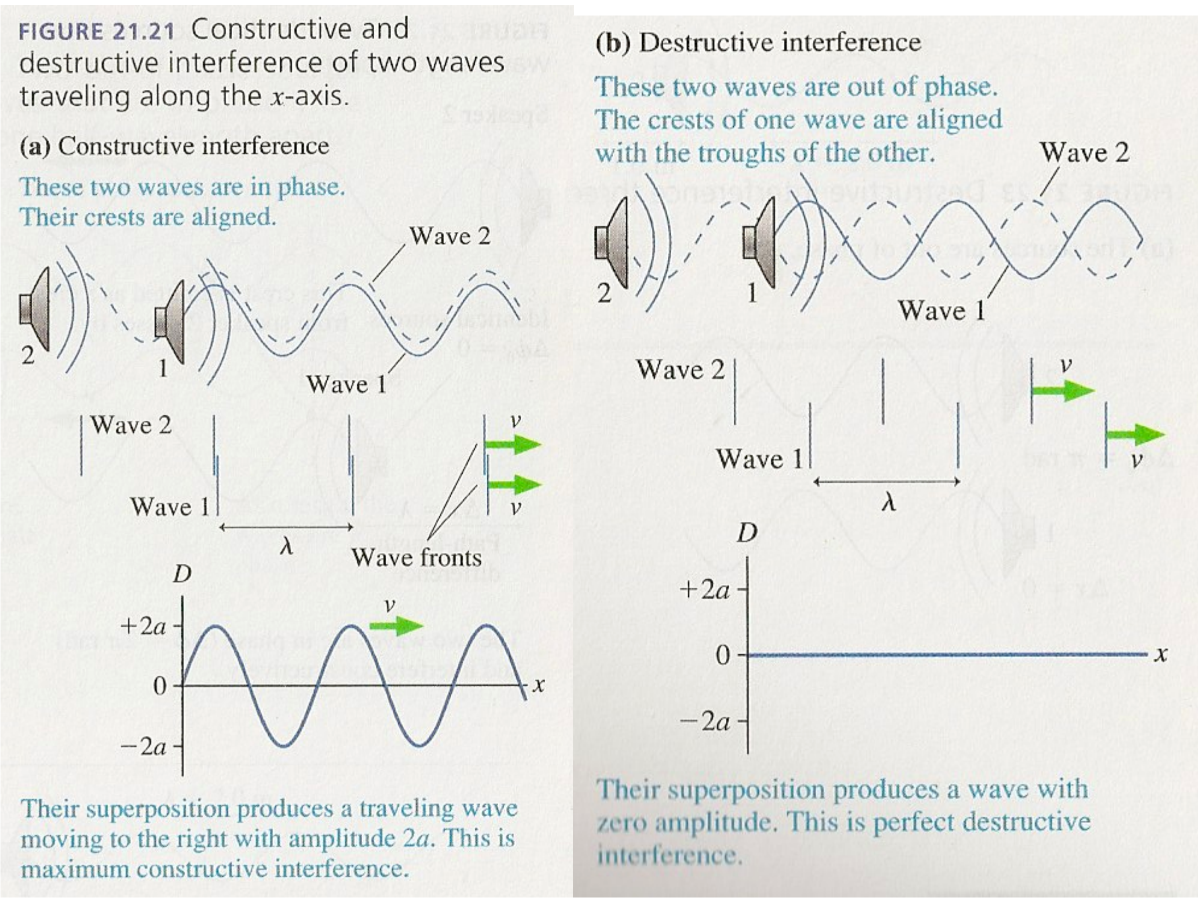
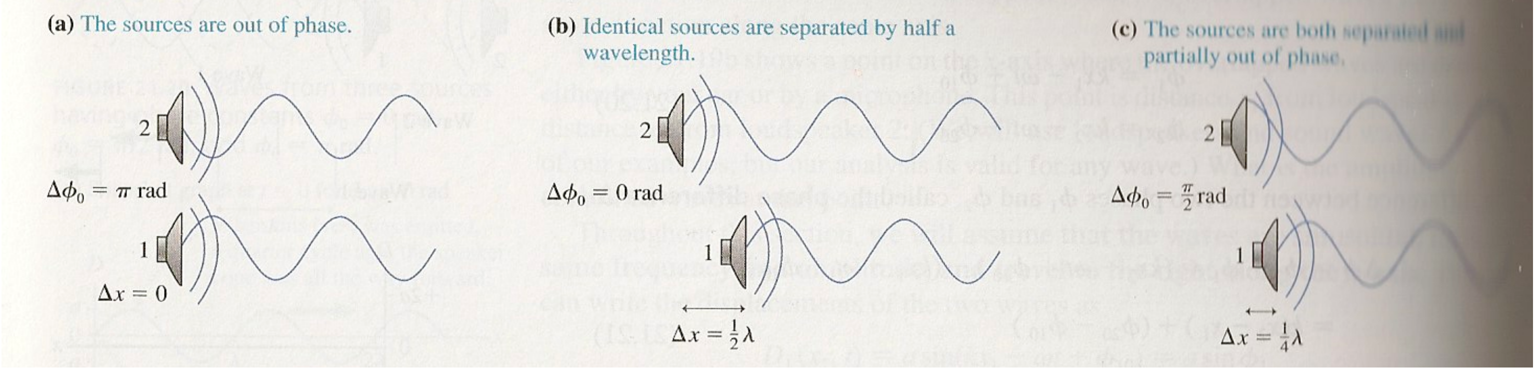


FIGURE 21.23 Destructive interference three ways.



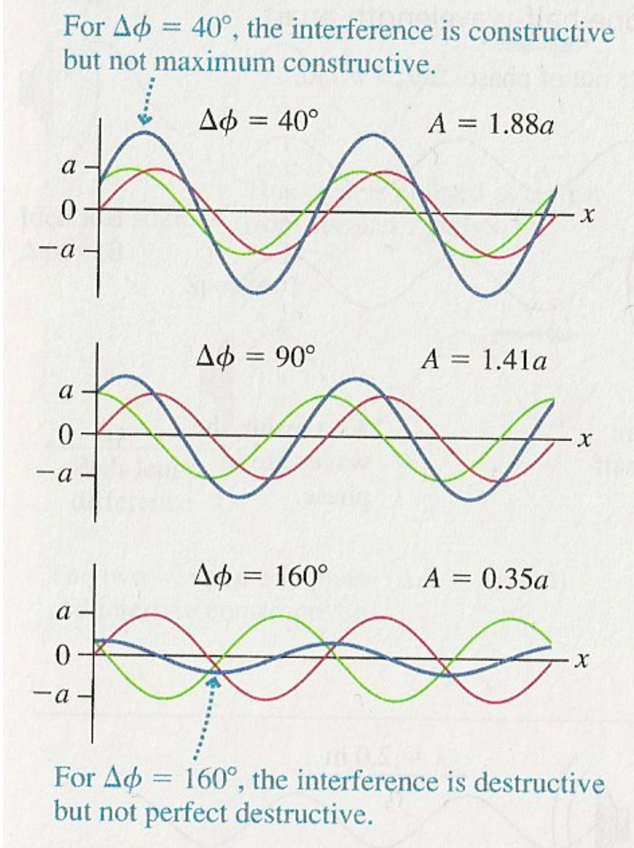
Note : Une interférence destructive parfaite (cas on l'amplitude de l'onde résultante est nulle) n'est possible que dans le cas où l'amplitude des deux ondes est identique comme nous l'avons supposé. Deux ondes d'amplitude différente peuvent interférer de façon destructive mais l'annulation ne sera pas parfaite ; l'onde résultante aura une amplitude faible mais pas nulle.

La tableau ci dessous résume la situation sur les interférences.

Interférences constructives	**Interférences destructives**
$\Delta\phi = n \times 2\pi$ avec $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ soit $\Delta\phi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$	$\Delta\phi = (2n+1) \times \pi$ avec $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ soit $\Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$
Si sources identiques $(\Delta\phi_0 = 0)$	
$\Delta x = n \times \lambda$ soit $\Delta x = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$	$\Delta x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \lambda$ soit $\Delta x = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \frac{7\lambda}{2}, \dots$

Pour un déphasage $\Delta\phi$ quelconque, l'interférence des deux ondes va produire une onde résultante dont l'amplitude sera comprise entre 0 et $2A$. Cela est illustré sur la figure 21.25 ci contre.

FIGURE 21.25 The interference of two waves for three different values of the phase difference.



Exercice d'application 1

Deux haut-parleurs émettent chacun une onde acoustique de fréquence 500 Hz et d'amplitude 0,10 Pa. Le haut-parleur 2 est placé à 1 m devant le haut-parleur 1 et la différence de phase à l'origine entre les deux haut-parleurs vaut 90°.

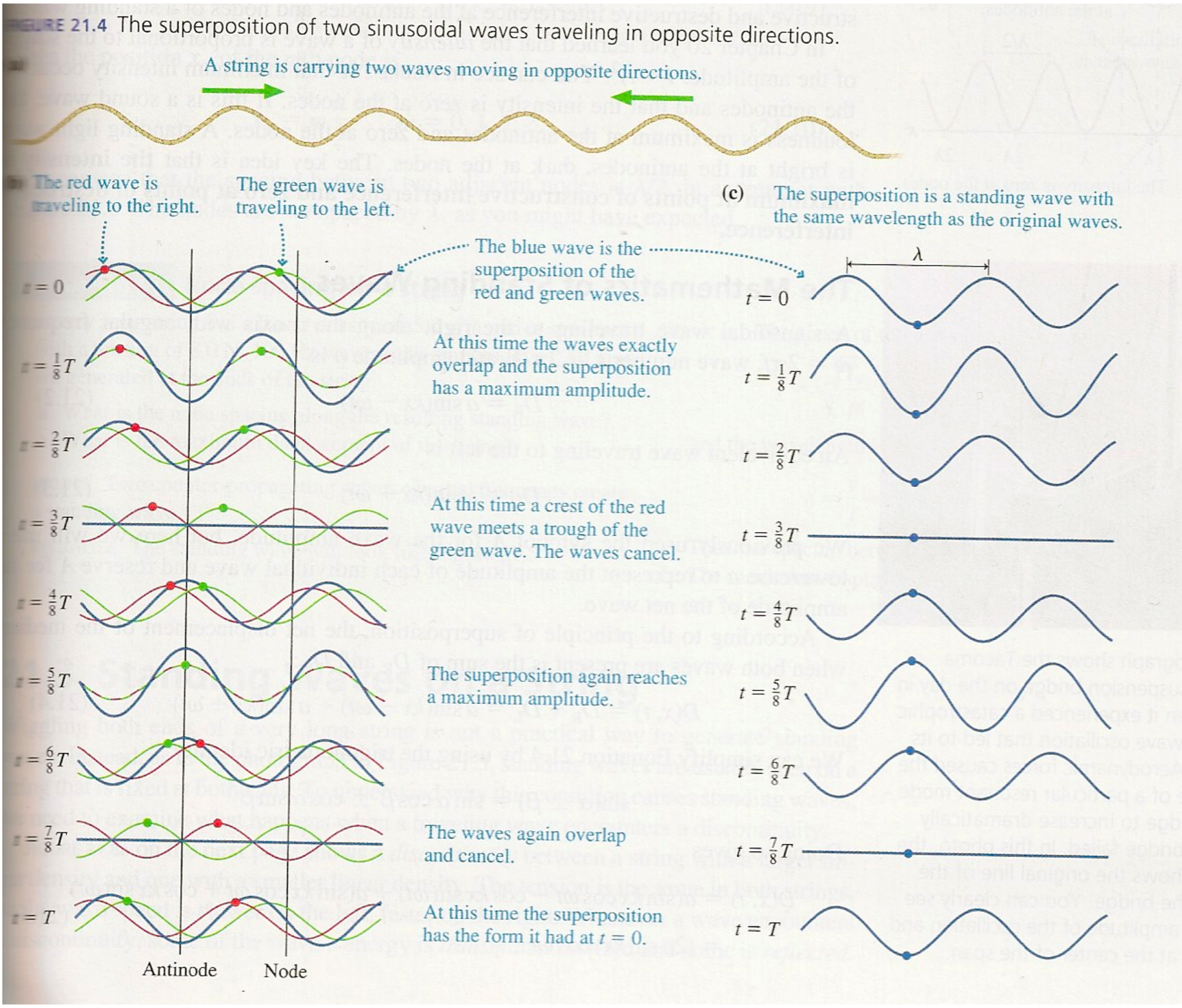
Que vaut l'amplitude de l'onde acoustique à 2 m devant le haut parleur 1 ? Conclusion ?

III – Onde stationnaire

3.1 Généralités

En présence d'une onde progressive, comme nous l'avons déjà vu, les particules qui constituent le milieu de propagation oscillent, tandis que l'énergie de l'onde est transportée d'un endroit à un autre. En présence d'une **onde stationnaire**, il y a oscillation des particules qui constituent le milieu de propagation **mais l'énergie « demeure en place ».**

3.2 Première description



On considère deux ondes progressives harmoniques de même fréquence et de même amplitude se propageant dans **deux direction opposées**, une vers la droite et l'autre vers la gauche. L'onde résultante est obtenue par la superposition de ondes. Cela est illustré sur la figure ci-dessus 21.4, où l'onde résultante est représentée à différents instants en bleue**. On constate que cette onde ne se déplace ni à gauche ni à droite. Cette onde est appelée stationnaire**

car les « creux » et les « crêtes » restent « sur place », aucune énergie ne se propage, elle oscille sur place !

3.3 Description mathématiques

L'onde qui se déplace vers la droite s'écrit $S_D = A\sin(kx - \omega t)$ et celle qui se déplace vers la gauche $S_G = A\sin(kx + \omega t)$. On suppose que les ondes n'ont pas de phase à l'origine, cela ne change rien aux résultats généraux que l'on va obtenir. L'onde totale dans la milieu est la somme des ces deux ondes :

$$S_{stat} = S_G + S_D = A\sin(kx + \omega t) + A\sin(kx - \omega t)$$

En utilisant la relation trigonométrique $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, on obtient :

$$\boxed{S_{stat} = \underbrace{\left[2A\sin(kx)\right]}_{\text{amplitude}}\cos(\omega t)}$$

On constate que S_{stat} n'est ni une fonction de la variable $x - vt$ ni une fonction de la variable $x + vt$. Il ne s'agit pas d'une onde progressive. A la place, le terme dans décrit un milieu dans lequel **chaque point oscille de façon harmonique** avec la fréquence $f = \omega/2\pi$. Le terme $2A\sin(kx)$ donne l'amplitude des oscillations pour une particule à la position x.

⇒ LES NŒUDS de l'onde stationnaire correspondent aux points d'amplitude nulle, il s'agit de points qui n'oscillent pas. Ils dont donnés par :

$$2A\sin(kx) = 0$$

La fonction sin s'annule si son argument est un multiple entier de π rad soit :

$$kx_{noeud} = \frac{2\pi}{\lambda}x_{noeud} = n\pi \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ainsi les divers position x_{noeud} des n nœuds se trouve en :

$$\boxed{x_{noeud} = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \underline{\text{position des noeuds}}}$$

Ces points sont remarquables car $S_{tot}(x_{noeud}, t) = 0$ **pour chaque** x_{noeud} **et ceci à chaque instant** t **!**

⇒ LES VENTRES de l'onde stationnaire correspondent aux points d'amplitude maximale. Ils sont donnés par :

$$\left|\sin(kx)\right| = 1$$

soit :

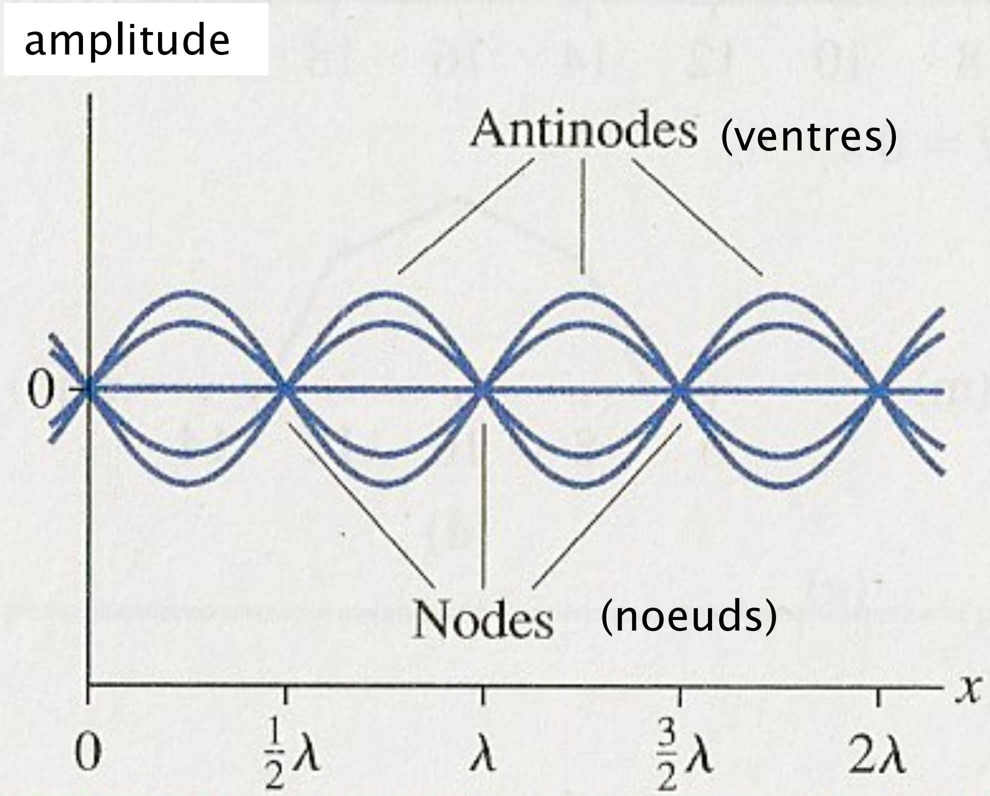
$$kx_{ventre} = \frac{2\pi}{\lambda}x_{ventre} = (n+1/2)\pi \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Ainsi les divers position x_{ventre} des n ventres se trouve en :

$$x_{ventre} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad n = 0,1,2,3,\ldots \quad \underline{\text{position des ventres}}$$

On constate donc que la distance entre deux ventres consécutifs ou deux nœuds consécutifs vaut $\lambda/2$ et la distance entre un nœud et un ventre consécutifs vaut $\lambda/4$. Ces résultats sont illustrés sur la figure 12,51 ci-dessous.

FIGURE 21.5 Standing waves are often represented as they would be seen in a time-lapse photograph.

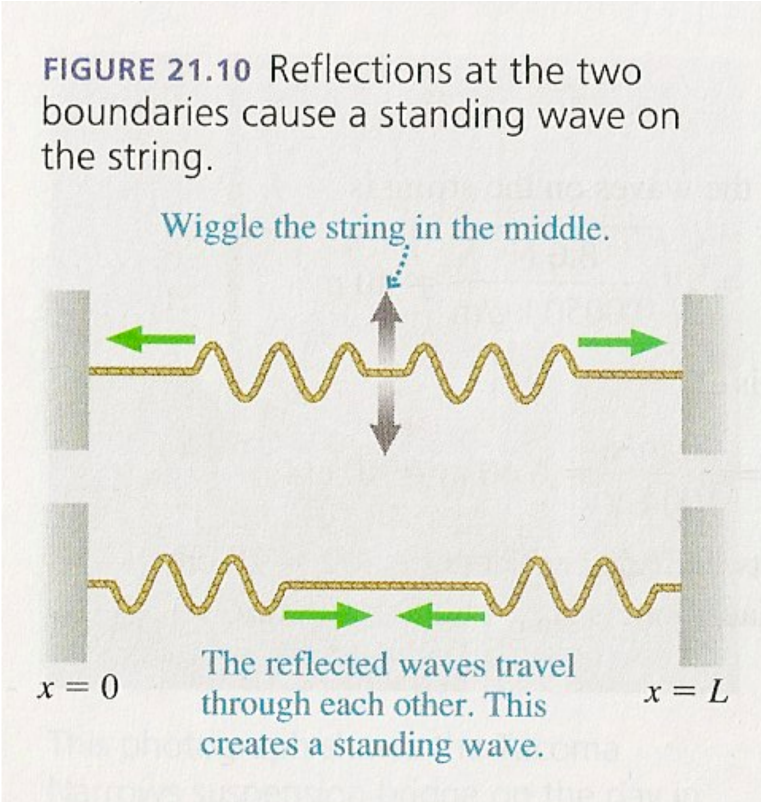


The nodes and antinodes are spaced $\lambda/2$ apart.

3.4 Production d'une onde stationnaire, modes propres

Il existe une méthode simple pour produire une onde stationnaire, vous l'avez sans doute déjà expérimenté !

Considérons une corde fixée en ses deux extrémités comme une corde de guitare. Si on la pince en son milieu, on produit deux ondes progressives harmoniques de même qui se propagent dans les deux directions opposées (cf. figure 21.10 ci-contre). Chaque onde va se réfléchir à l'une des extrémités de la corde pour repartir dans l'autre direction. Ainsi la réflexion va permettre d'obtenir **la superposition de des deux ondes progressives de même fréquence, de même amplitude mais se propageant dans deux directions opposées**, on a les conditions d'obtention d'une onde stationnaire.



Etant donnée que la corde est fixe en ses deux extrémités, il s'agit de nœuds de l'onde stationnaire. La distance entre les nœuds vaut $\lambda/2$, la longueur de la corde ne peut être qu'un multiple entier de $\lambda/2$ donc $\ell = n\lambda/2$ avec n un entier positif. On a donc un résultant intéressant, **seules certaines longueurs d'ondes sont possibles** et elles sont données par :

Longueurs d'onde autorisées

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n} \quad \text{avec } n = 1,2,3,\ldots$$

Si on connait la vitesse v de propagation de l'onde, on obtient les fréquences autorisées :

Fréquences autorisées

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2\ell/n} = n\frac{v}{2\ell} \quad \text{avec } n = 1,2,3,\ldots$$

La figure 21.11 ci dessous illustre ces résultats.

Il faut noter les points suivants :

- La fréquence la plus élevée $f_1 = v/2\ell$ pour $n = 1$ s'appelle la **fréquence fondamentale** (ou simplement le fondamental). Elle correspond à $\lambda = 2\ell$.

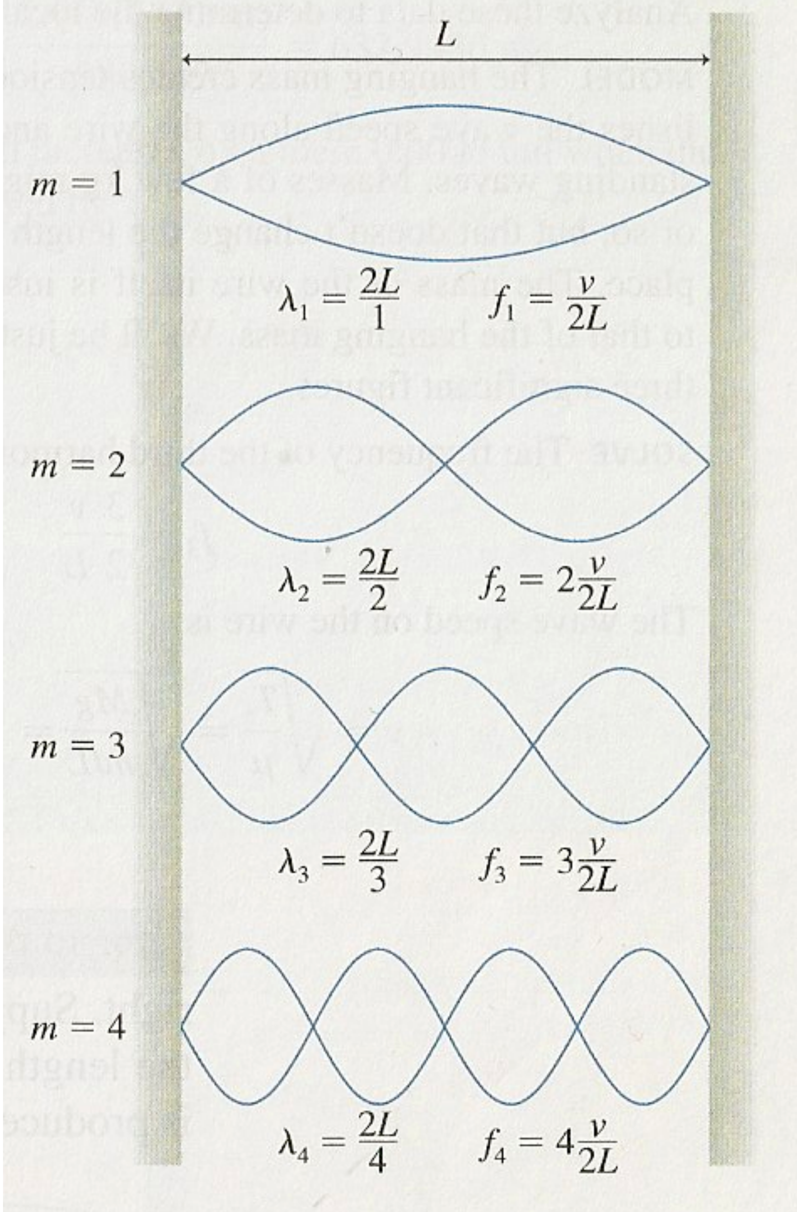
- Les fréquences suivantes, plus hautes, s'appellent **les harmoniques**.

- Pour chaque harmonique de rang n, il y a n ventres et $n+1$ nœuds.

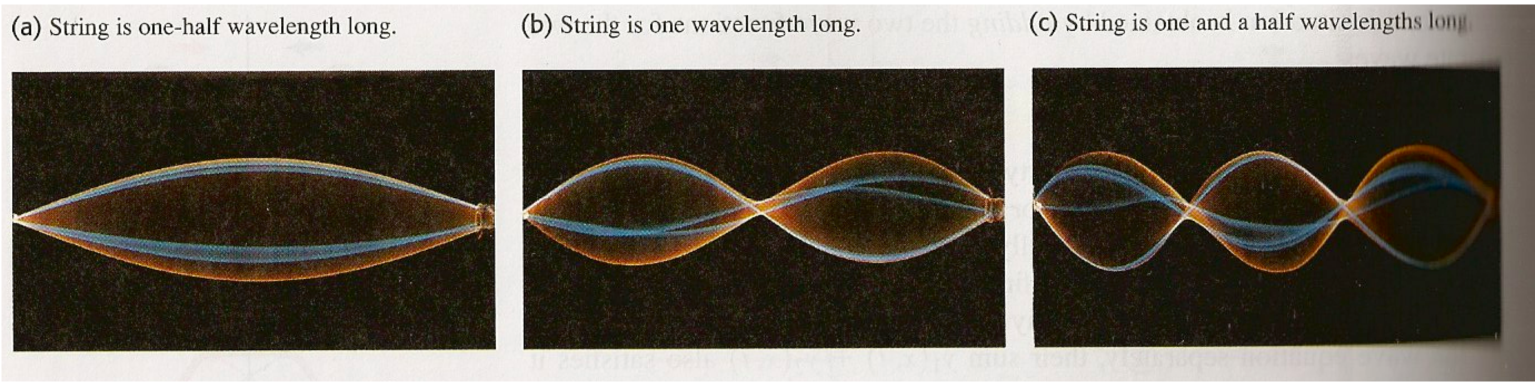
- la vibration harmonique de rang n, s'appelle une **mode propre de vibration**.

- La fondamentale et les harmoniques forment une série de fréquences : $f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, \ldots$

FIGURE 21.11 The first four modes for standing waves on a string of length L.



La figure ci-dessous montre les vibrations d'une corde réelle pour les trois premiers modes propres.



Lorsque l'on pince une corde au « hasard » de longueur ℓ, il y a peu de chance que l'on arrive à la faire vibrer exactement suivant un mode propre. La vibration la plus générale sera une

combinaison linéaire (une somme), des différents modes propres possibles à l'image d'un vecteur quelconque du plan qui est une combinaison linéaires des vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Si vous jouer un Do sur une corde de guitare, vous obtiendra le fondamental correspond à la fréquence du Do jouer plus un certain nombre des harmoniques suivantes. C'est cela qui fait la richesse acoustique d'un instrument, on parle du **timbre** d'un instrument. Le nombre d'harmoniques présentent dépend du type d'instrument d'où des sonorités, des timbres, distinctes.

Exercice d'application 2

Une corde de violon de 32 cm est accordée pour jouer un La (en dessous du Do moyen) à 440 Hz.

a) Déterminer la longueur d'onde de la vibration du fondamental de la corde.

b) Déterminer la fréquence et la longueur d'onde de l'onde acoustique (sonore) ainsi produite ?

c) Pourquoi les deux longueurs précédemment calculées sont-elles différentes ?

Données : Vitesse du son dans l'air à 20°C $= 343$ m/s^{-1}.