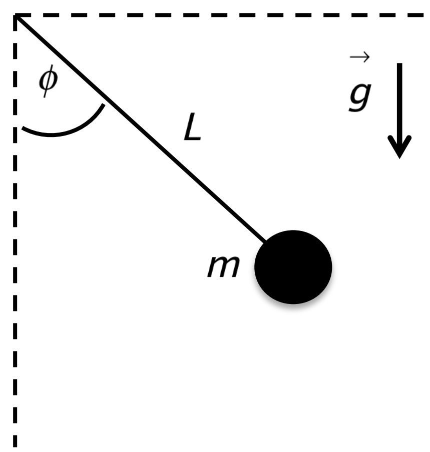
Mécanique série n°5: Oscillateurs en régime forcé

Exercice 1 : Pendule simple en régime forcé ◆◆

On considère un pendule simple de longueur L (cf. figure ci-contre) qui oscille dans un plan vertical. Il est soumis, en plus des forces usuelles (poids, tension du fil), à :

- Une force de frottement fluide de la forme $-b\vec{v}$.
- Une force d'excitation périodique de pulsation ω et de la forme $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, colinéaire au vecteur vitesse.



a) Par la méthode de votre choix, montrer que l'équation différentielle qui gouverne l'évolution de $\phi(t)$ s'écrit :

$$\boxed{\ddot{\phi}(t) + \frac{b}{m}\dot{\phi}(t) + \frac{g}{L}\sin\phi(t) = \frac{F_0}{mL}\cos(\omega t)}$$

b) Nous ne savons pas résoudre analytiquement cette équation différentielle dans le cas général à cause du terme non linéaire $\sin\phi(t)$. Nous allons résoudre cette équation de façon numérique en TD d'informatique avec Maple et nous verrons que ce pendule dit « simple » a une dynamique d'une grande richesse et que ce système physique « élémentaire » peut engendrer le « chaos ». Nous en reparlerons.
Nous allons donc supposer que l'angle $\phi(t)$ reste petit et écrire $\sin\phi \approx \phi$ (il faut pour cela que l'amplitude de l'excitation F_0 ne soit pas trop importante). Dans ce cas-là, l'équation différentielle devient linéaire et nous savons la résoudre de façon analytique. Nous écrirons comme d'habitude $2\beta = b/m$ et $\omega_0^2 = g/L$. Nous ferons apparaître le paramètre sans dimension $\gamma = F_0/mL\omega_0^2 = F_0/mg$ qui caractérise le rapport de l'amplitude de la force d'excitation et du poids.
Après avoir réécrit l'équation différentielle en fonction de β, ω_0^2 et γ, déterminer $\phi(t)$ en régime permanent sous la forme $\phi(t) = A\cos(\omega t - \delta)$, ce qui revient à trouver $A(\omega)$ et $\delta(\omega)$.

c) Pour quelle valeur de ω l'amplitude $A(\omega)$ est-elle maximale ?

d) Après une étude sommaire des fonctions $A^2(\omega)$ et $\delta(\omega)$, tracer l'allure de ces dernières. Nous pourrons tracer l'allure des courbes pour deux facteurs de qualité Q_1 et Q_2 tels que $Q_1 > Q_2$ par exemple (Rappel : $Q = \omega_0/2\beta$).

Exercice 2 : La couleur du ciel ◆◆◆

Pour décrire les interactions entre une onde lumineuse caractérisée par le champ électrique : $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ et les électrons de la couche externe d'un atome, on utilise l'hypothèse de l'électron élastiquement lié de J. J. Thomson

a) Établir l'équation du mouvement d'un tel électron quand il est excité par le champ électrique $\vec{E}(t)$ en admettant qu'il est rappelé vers le centre O de l'atome par une force de la forme $\vec{f}_{elas} = -k\overrightarrow{OM}$ et qu'il est freiné par une force proportionnelle à sa vitesse $\vec{f}_r = -h\vec{v}$.

On notera par q et m respectivement la charge et la masse de l'électron et on posera $2\alpha = h/m$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

NB : une particule de charge q soumis à un champ électrique $\vec{E}(t)$ subit une force $q\vec{E}(t)$.

b) En régime établi, l'électron oscille parallèlement à $\vec{E}_0 = E_0\overrightarrow{u_x}$ (il est amorti suivant $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$). On notera x son élongation. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x.

c) On considère que la réponse de l'atome à l'excitation est l'accélération $\ddot{x}$ de son électron. Établir l'expression de l'accélération complexe.
Cet atome est éclairé par de la lumière blanche composée d'ondes dont les pulsations sont comprises entre ω_1 (rouge) et ω_2 (violet). Sachant que α et ω_2 sont tous deux très inférieurs à ω_0, montrer que, dans ces conditions, l'amplitude de l'accélération est proportionnelle à ω^2.
d) Sachant qu'un électron accéléré rayonne une puissance lumineuse P proportionnelle au carré de son accélération, expliquer pourquoi la couleur du ciel est bleue.