

FONCTION DE TRANSFERT DES QUADRIPOLES LINEAIRES : FILTRÉS PASSIFS ET ACTIFS

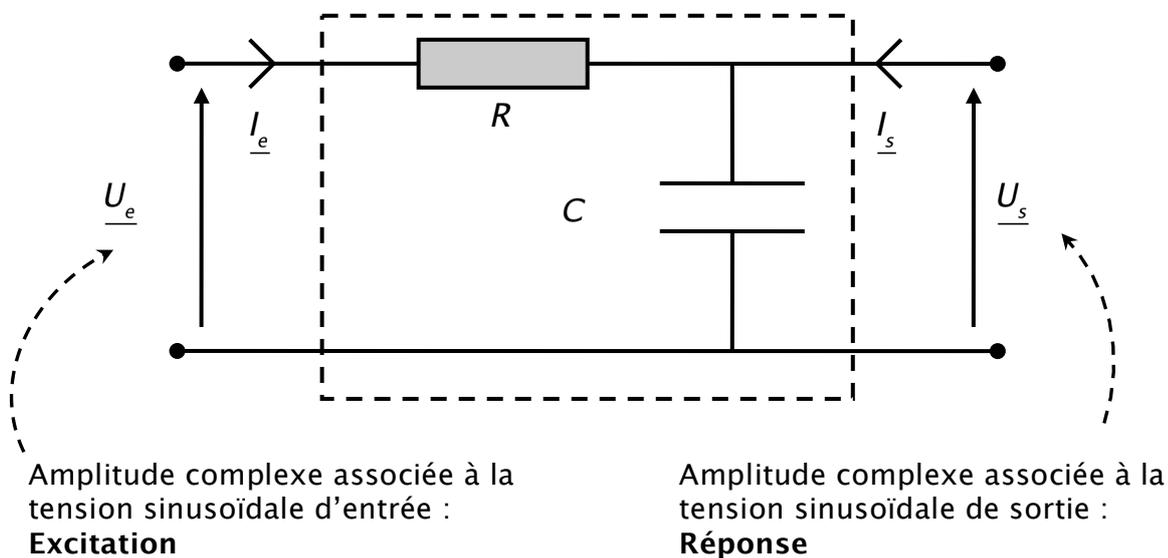
« For a successful technology, reality must take precedence over public relations, for Nature cannot be fool »
Richard Feynman (1928-1988)

Dans ce chapitre, nous allons étudier les circuits électriques sous l'angle du **filtre**. De façon plus précise, nous allons étudier la réponse (signal de sortie) d'un circuit soumis à une excitation sinusoïdale (signal d'entrée) suivant la fréquence de cette excitation. Nous introduirons ainsi des outils commodes que sont la **fonction de transfert** et les **diagrammes de Bode**. Les notions introduites dans ce chapitre sont très générales et s'appliquent dans d'autres domaines (mécanique, optique...), c'est pourquoi l'étude de ce chapitre sera approfondie et généralisée dans le cours de SI mais aussi dans le cours de physique de PT.

On trouve des filtres dans un peu près tous les appareils électroniques qui nous entourent : les téléphones, les radios, les télévisions, les ordinateurs etc...

I - CONCEPTS DE BASE : EXEMPLE DU FILTRE PASSE-BAS RC

1.1 Fonction de transfert



On cherche à déterminer la réponse du circuit ci-dessus, $u_s(t) = U_{ms} \cos(\omega t + \varphi_s)$, lorsqu'il est soumis à une excitation sinusoïdale d'entrée $u_e(t) = U_{me} \cos(\omega t + \varphi_e)$. Nous allons travailler avec les amplitudes complexes associées à ces tensions (\underline{U}_s et \underline{U}_e).

On remarque que rien n'est « branché » sur la sortie du circuit, on travaille en sortie ouverte. Ainsi $i_s(t) = 0$.

Pour déterminer \underline{U}_s en fonction de \underline{U}_e , on peut employer un pont diviseur de tension, outil que

nous allons souvent utiliser dans ce chapitre. On a $\underline{U}_s = \frac{1/jC\omega}{R+1/jC\omega} \underline{U}_e$.

Nous voyons que le rapport $\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1/jC\omega}{R+1/jC\omega} = \frac{1}{1+jRC\omega}$ est une fonction caractéristique du circuit

étudié qui relie le signal d'entrée au signal de sortie, c'est la **fonction de transfert**. De façon générale, on définit:

$$\text{Fonction de transfert, définition: } \underline{H}(\omega) \equiv \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$$

$\underline{H}(\omega)$ est une fonction complexe qui dépend de la pulsation ω du signal d'entrée. Elle possède donc un module $|\underline{H}(\omega)|$ et une phase $\varphi(\omega)$, $\underline{H}(\omega) = |\underline{H}(\omega)|e^{j\varphi}$. Ce chapitre consiste essentiellement à étudier ces deux fonctions pour divers réseaux.

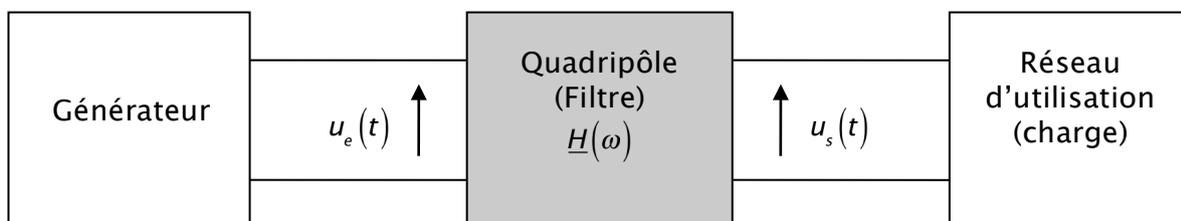
Ici, on obtient facilement :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} \text{ et } \varphi(\omega) = -\arctan(RC\omega).$$

Suivant la valeur de ω , $|\underline{H}(\omega)|$ et $\varphi(\omega)$ prennent des valeurs différentes. Ainsi, comme nous le verrons, le signal d'entrée sera transmis de façon différente par le circuit suivant sa pulsation. On appelle donc ces circuits des **filtres**.

1.2 Commentaires et remarques générales sur les filtres

- Les circuits que nous étudions dans ce chapitre, comme le filtre RC précédent, possèdent deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie, il s'agit de **quadripôles**.
- Un **filtre** est un quadripôle conçu pour **transmettre sélectivement** les diverses fréquences (ou pulsation) du signal d'entrée harmonique (sinusoïdal).



- La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire (constitué uniquement de dipôles linaires) s'écrit de façon générale comme le rapport de deux polynômes en $(j\omega)$:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_n(j\omega)^n}{a'_0 + a'_1(j\omega) + a'_2(j\omega)^2 + \dots + a'_n(j\omega)^n},$$

avec a_n et a'_n des coefficients réels. **L'ordre d'un filtre** correspond au degré le plus élevé du polynôme (soit au numérateur soit au dénominateur).

Il faut noter que la fonction de transfert d'un filtre n'est rien d'autre, en représentation complexe, que l'équation différentielle qui relie $u_s(t)$ et $u_e(t)$. En effet si on repasse en représentation temporelle, en se souvenant de la substitution $j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$, on obtient :

$$a'_0 u_s(t) + a'_1 \frac{du_s(t)}{dt} + a'_2 \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + \dots + a'_n \frac{d^n u_s(t)}{dt^n} = a_0 u_e(t) + a_1 \frac{du_e(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 u_e(t)}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n u_e(t)}{dt^n}.$$

Il est plus simple de travailler en représentation complexe car on manipule des équations algébriques plutôt que des équations différentielles.

Dans ce cours, nous n'étudierons pas les problèmes d'existence et de stabilité de la fonction de transfert d'un point de vue mathématique. Cela sera étudié en partie dans le cours de sciences de l'ingénieur.

- Un **filtre passif** ne contient que des dipôles passifs R , L et C . Un **filtre actif** contient des éléments actifs alimentés par des sources extérieures d'énergie ; pour nous il s'agira uniquement des amplificateurs opérationnels.

1.3 Gain et Gain en décibel

a) Gain

Par définition, le gain est le module de la fonction de transfert :

$$\text{Gain, définition: } G(\omega) \equiv |\underline{H}(\omega)|$$

Il est souvent plus commode de travailler en pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ où ω_0 est la pulsation

caractéristique du filtre. Dans notre exemple, on a $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $\underline{H}(x) = \frac{1}{1+jx}$ et $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

b) Gain en décibel

Par définition, le gain en décibel est donné par :

$$\text{Gain en décibel: } G_{\text{dB}}(x) \equiv 20 \log |\underline{H}(x)| = 20 \log G(x)$$

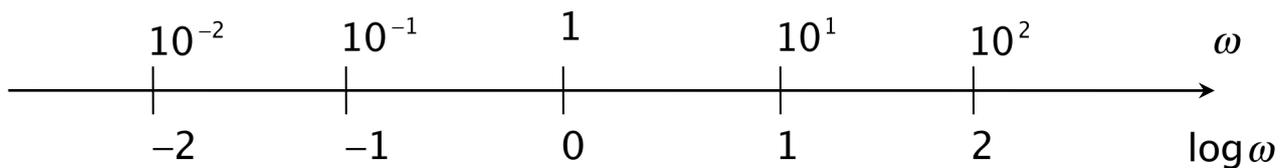
L'unité du gain en décibel est le décibel noté dB. Il s'agit en réalité d'une fausse unité car $|H(\omega)|$ n'a pas d'unité, on ne peut pas prendre le log d'une grandeur avec une unité. Pourquoi travailler avec $G_{dB}(x)$ plutôt qu'avec $G(x)$?

→ La fonction log atténue les variations d'une grandeur, on peut donc étudier à la fois, sur le même graphe, les faibles et les fortes valeurs de $G(x)$.

→ Les yeux (capteurs naturels de l'intensité lumineuse) et les oreilles (capteurs naturels de l'intensité acoustique) sont plus sensibles à une échelle logarithmique qu'à une échelle linéaire.

c) Rappels de mathématiques utiles dans ce chapitre :

- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$; $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a$; $\log(a^n) = n \log a$.
- $\log(2) \approx 0,3$; $\log(3) \approx 0,5$.
- Si on divise $G(\omega)$ par $\sqrt{2}$, en décibel on obtient $20 \log \frac{G(\omega)}{\sqrt{2}} = 20 \log G(\omega) - 10 \log 2$ soit $20 \log G(\omega) - 3 \text{ dB}$, cela revient à retrancher 3 au gain en décibel.
- Si on divise $G(\omega)$ par 10, en décibel on obtient $20 \log \frac{G(\omega)}{10} = 20 \log G(\omega) - 20 \log 10$ soit $20 \log G(\omega) - 20 \text{ dB}$, cela revient à retrancher 20 au gain en décibel.
- Un changement d'un ordre de grandeur en ω correspond seulement à un changement de une unité en $\log \omega$. Ainsi, en échelle log, on peut représenter des variations de ω bien plus importantes qu'en échelle linéaire.



1.4 Diagrammes de Bode

Nom donné en l'honneur de Hendrik W. Bode (1905-1982), un ingénieur des célèbres laboratoires de la compagnie américaine Bell Telephone, pour son travail de pionnier dans ce domaine dans les années 1930-40.

a) Diagramme de Bode du gain en décibel

Il s'agit du **graphe** $G_{dB}(\omega) = f(\log \omega)$ ou plutôt $G_{dB}(x) = f(\log x)$ car on travaillera le plus souvent en pulsation réduite.

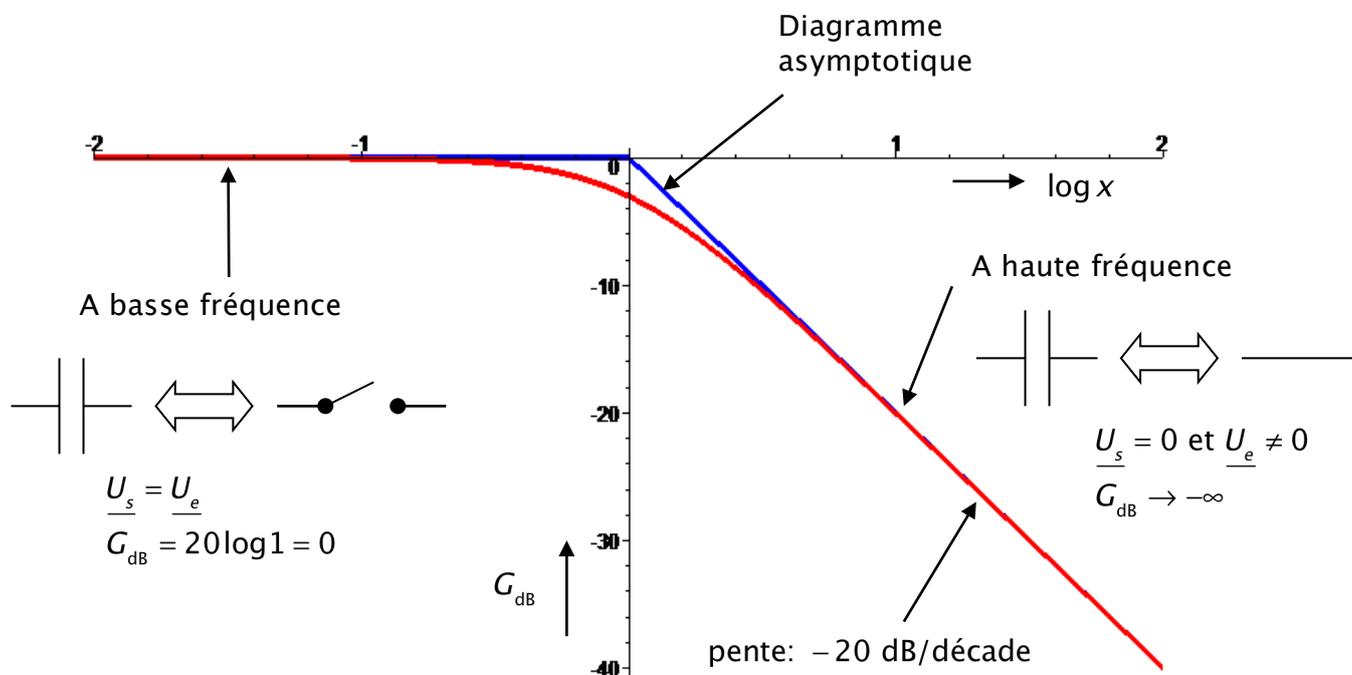
Nous allons reprendre l'étude de notre exemple du filtre RC. On a $20 \log G(x) = -10 \log(1+x^2)$, étudions brièvement cette fonction :

- $x \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow 0 \quad \log x \rightarrow -\infty \quad G_{dB} \rightarrow 0$
- $x \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty \quad \log x \rightarrow \infty \quad G_{dB} \rightarrow -10 \log x^2 = -20 \log x$

A haute fréquence, la courbe de réponse en gain admet une **asymptote** passant par l'origine et de pente -20 dB/décade.

- $x = 1 \quad \omega = \omega_0 \quad G_{dB} = -10 \log 2 = -3$ dB

On obtient la courbe suivante (réalisée avec Maple) :



On constate que pour $\omega \ll \omega_0$ c'est-à-dire $x \ll 1$, le filtre transmet les signaux presque sans atténuation, cette dernière reste inférieure à 3 dB. Par contre pour $\omega \gg \omega_0$ c'est-à-dire $x \gg 1$, les signaux sont très atténués à la sortie du filtre ; l'atténuation est de -20 dB par décade. Il s'agit donc d'un filtre passe-bas, il ne laisse passer que les signaux de basses fréquences. De plus, il n'est constitué que de dipôles passifs (R et C) et sa fonction de transfert est seulement du 1^{er} ordre, il s'agit donc d'un **filtre passe-bas du 1^{er} ordre passif**.

b) Diagramme de Bode de la phase.

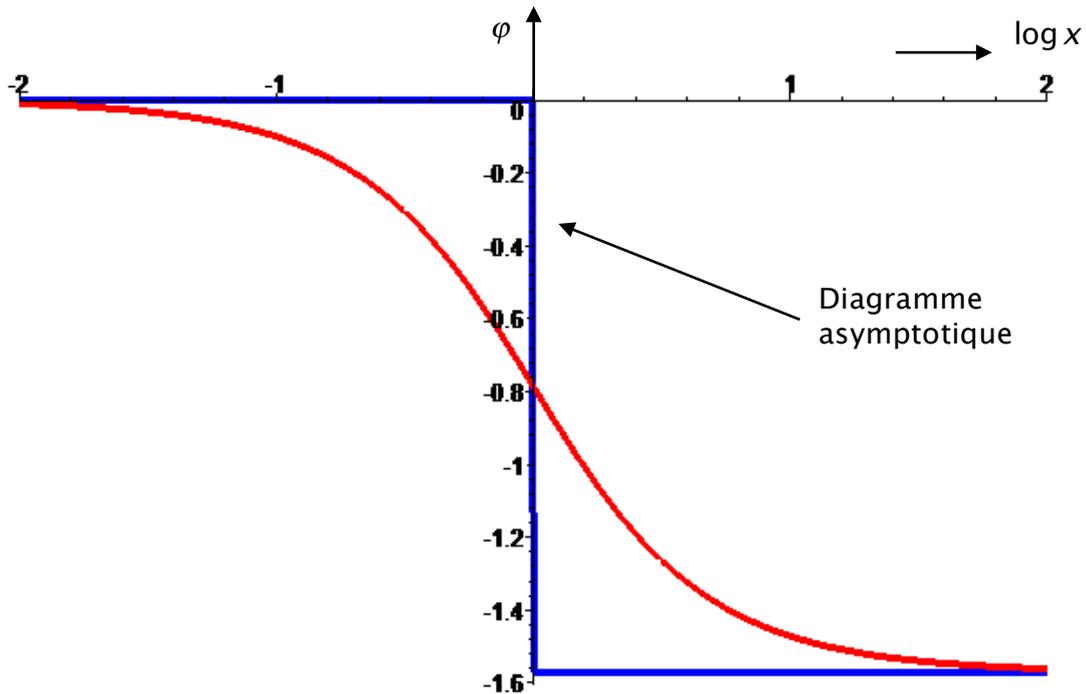
Il s'agit du **graphe** $\boxed{\varphi(\omega) = f(\log \omega)}$ ou plutôt $\boxed{\varphi(x) = f(\log x)}$ car on travaillera le plus souvent en pulsation réduite.

Dans le cas du filtre RC , on a $\varphi(x) = -\arctan(x)$, étudions brièvement cette fonction :

- Comme $x > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi(x) < 0$
- $x \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow 0 \quad \log x \rightarrow -\infty \quad \varphi \rightarrow 0$
- $x \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty \quad \log x \rightarrow \infty \quad \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

- $x = 1 \quad \omega = \omega_0 \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$

On obtient la courbe suivante (réalisée avec Maple)



A basse fréquence $x \ll 1$, le signal de sortie n'est pas déphasé par rapport à celui d'entrée, par contre il se déphase de $-\pi/2$ à haute fréquence $x \gg 1$. Nous verrons que dans ce dernier cas, le circuit a un caractère intégrateur.

1.5 Pulsation de coupure, bande passante à -3 dB

On a déjà parlé de la notion de bande passante dans l'étude du circuit *RLC* série en régime sinusoïdal forcé dans le cadre du phénomène de résonance.

- Par définition, la pulsation de coupure ω_c est telle que $G(\omega = \omega_c) = \frac{G^{\max}}{\sqrt{2}}$, soit en décibel :

$$G_{\text{dB}}(\omega = \omega_c) = G_{\text{dB}}^{\max} - 3 \text{ dB}.$$

- La bande passante d'un filtre est l'ensemble des pulsations telles que :

$$\frac{G^{\max}}{\sqrt{2}} \leq G(\omega) \leq G^{\max} \quad \text{où} \quad G_{\text{dB}}^{\max} - 3 \text{ dB} \leq G_{\text{dB}}(\omega) \leq G_{\text{dB}}^{\max}$$

Dans le cadre du filtre *RC*, comme $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $G^{\max} = 1$ quand $x = 0$.

$$\frac{G^{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x_c^2}} \quad \text{conduit à} \quad x_c = 1, \quad \text{soit} \quad \omega_c = \omega_0.$$

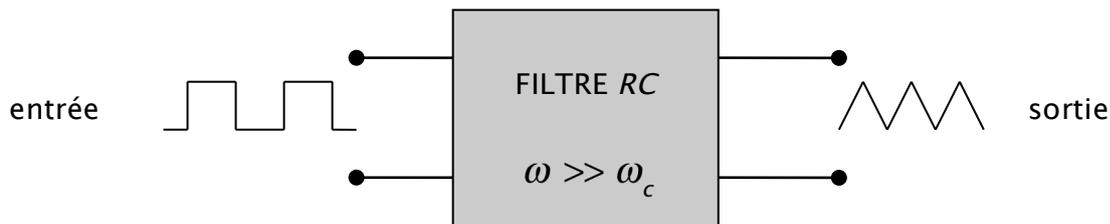
1.6 Caractère intégrateur du filtre

A haute pulsation, $\omega \gg \omega_c = \omega_0$, la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ du filtre RC devient

$\underline{H}(\omega) = \frac{U_s}{U_e} \approx \frac{1}{jRC\omega} = \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega}$. Si on repasse dans la représentation temporelle, on obtient :

$$u_s(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t u_e(t) dt.$$

On constate que le filtre réalise l'intégration du signal d'entrée, on a donc un **intégrateur**. Si on envoie à l'entrée du filtre un signal créneau de haute fréquence, on obtient à la sortie un signal triangle (cf TP). Attention, il ne faut pas oublier que la notion de fonction de transfert et l'utilisation de la représentation complexe ne sont valables que pour les signaux sinusoïdaux.



II – FILTRE ACTIF DU 1^{ER} ORDRE : EXEMPLE DU FILTRE INTEGRATEUR

2.1 Equation différentielle et fonction de transfert

On cherche à réaliser un quadripôle qui réalise, entre la tension d'entrée et la tension de sortie,

l'opération mathématique suivante : $u_s(t) = u_s(0) + \frac{1}{\tau} \int_0^t u_e(t) dt$, c'est-à-dire :

$$\frac{du_s(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} u_e(t)$$

En représentation complexe, cette équation différentielle donne la fonction de transfert du quadripôle souhaité (équation algébrique) :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{j\omega\tau}$$

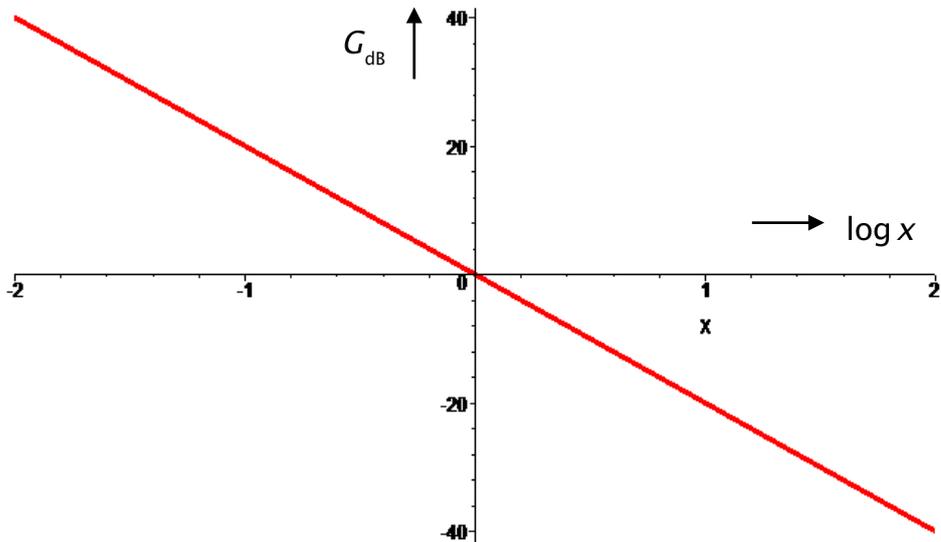
avec τ homogène à un temps. Il s'agit de la fonction de transfert d'un **filtre intégrateur**. Nous allons étudier l'allure de ces diagrammes de Bode.

2.2 Diagrammes de Bode

a) Diagramme de Bode du gain en décibel

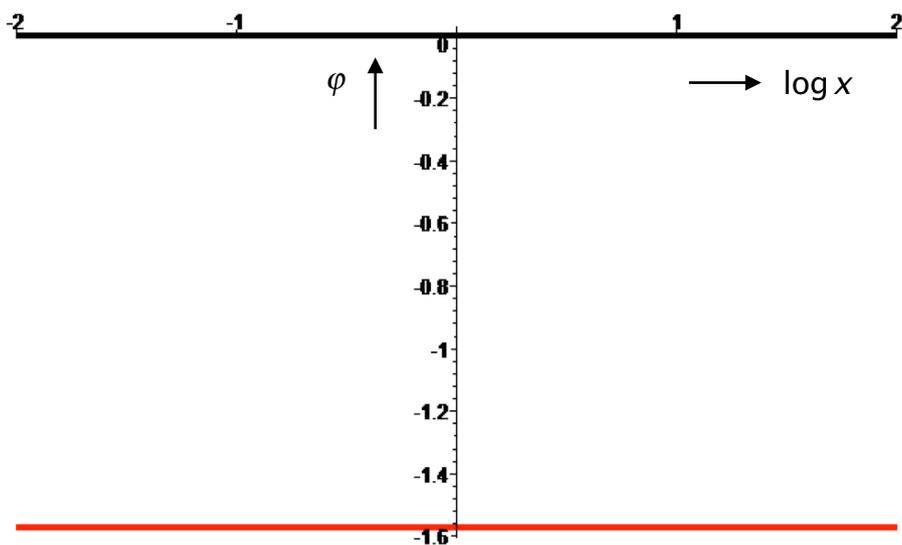
On peut faire apparaître la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec $\tau = \frac{1}{\omega_0}$; dans ce cas $\underline{H}(x) = \frac{1}{jx}$ et

$G(x) = \frac{1}{x}$ soit $G_{dB}(x) = -20 \log x$. Il s'agit d'une droite qui passe par l'origine et de pente -20 dB/décade.



b) Diagramme de Bode de la phase

On a facilement $\varphi(x) = \arg 1 - \arg(jx)$, soit $\varphi(x) = -\frac{\pi}{2} = \text{constante}$.

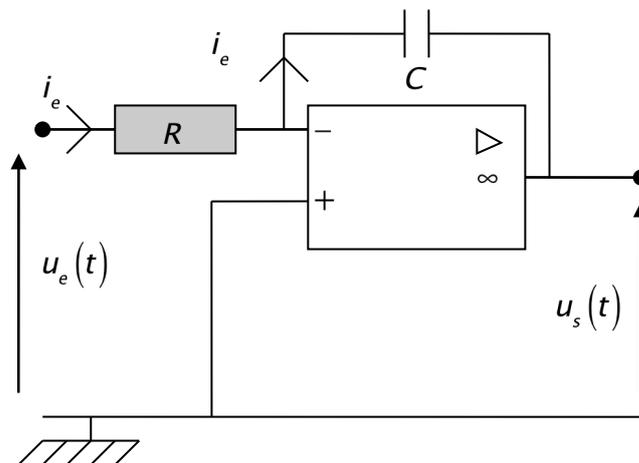


On constate qu'une phase de $-\frac{\pi}{2}$ et un gain de -20 dB/décade sont caractéristiques d'un **filtre intégrateur**. De même, on montre qu'une phase de $\frac{\pi}{2}$ et un gain de 20 dB/décade sont caractéristiques d'un **filtre dérivateur**.

2.3 Réalisation du montage

a) Réalisation théorique

On utilise un amplificateur opérationnel (filtre actif). Le montage ci-dessous, rencontré dans le cours sur l'AO, réalise la fonction souhaitée.



$$u_e = Ri_e, i_e = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}, u_s = -u_c.$$

$$\text{A } t = 0 \quad u_s(0) = 0, \text{ le condensateur est déchargé donc } i_e = \frac{u_e}{R} = -C \frac{du_s}{dt}.$$

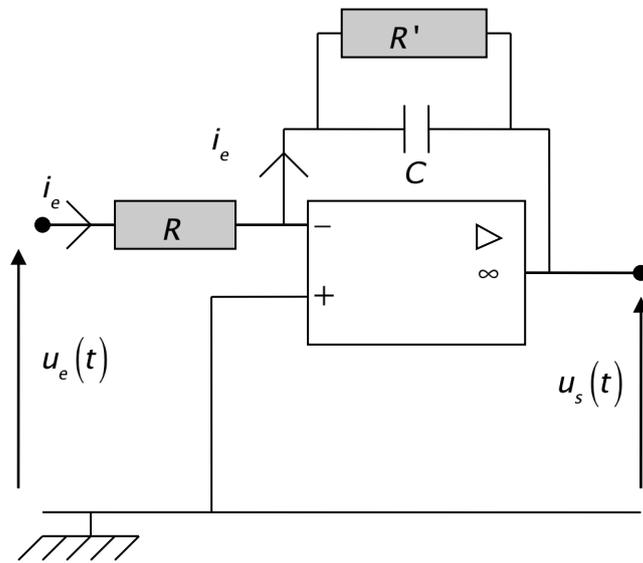
On obtient finalement $u_s(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_e(t) dt$ avec $\tau = RC$ ici. On constate que ce montage introduit un signe moins qui n'est cependant pas gênant (on peut l'éliminer en ajoutant un montage inverseur).

b) Réalisation pratique

Dans la réalité, ce montage ne fonctionne pas à cause des défauts de l'AO. En effet dans un AO réel, nous n'avons jamais i_+ et i_- rigoureusement nuls et $\varepsilon = (u_+ - u_-)$ est très faible mais jamais nulle.

Ainsi, très rapidement, $u_s(t)$ va saturer, $u_s(t) = \pm u_{sat}$ (ces défauts de l'AO ne sont pas problématiques pour les montages suiveurs, sommateurs, amplificateurs).

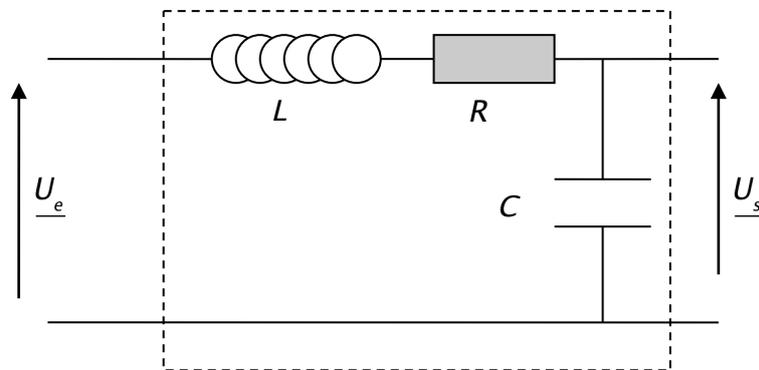
Pour remédier à ce problème, on montre (pas au programme) qu'il suffit de rajouter une **résistance** $R' \approx 1 \text{ M}\Omega$ **en parallèle du condensateur** (montage ci-dessous).



III – FILTRE PASSIF DU 2^{EME} ORDRE : EXEMPLE DU FILTRE *RLC* SERIE, FILTRE PASSE-BAS, RESONANCE EN TENSION

Nous allons reprendre l'étude du circuit *RLC* série en régime sinusoïdal forcé mais sous l'angle du filtre avec l'étude de sa fonction de transfert.

3.1 Montage et comportement limite du filtre



Avant de calculer la fonction de transfert de ce filtre et de l'étudier en détail, nous allons regarder le comportement limite de ce filtre. Cela va déjà nous permettre de déterminer la nature de ce filtre.

- $\omega \rightarrow 0 \quad |Z_C| = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty$ et $|Z_L| = \omega L \rightarrow 0$.

le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil sans résistance ainsi $\underline{U}_s = \underline{U}_e$.

- $\omega \rightarrow \infty \quad |Z_C| = \frac{1}{\omega C} \rightarrow 0$ et $|Z_L| = \omega L \rightarrow \infty$

Le condensateur se comporte comme un fil sans résistance et la bobine comme un interrupteur ouvert ainsi $\underline{U}_s = 0$.

On en déduit que ce filtre ne laisse passer que les basses fréquences, il s'agit donc **d'un filtre passe-bas**.

3.2 Fonction de transfert

On utilise encore un pont diviseur de tension pour calculer la fonction de transfert.

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L} \underline{U}_e = \frac{1/jC\omega}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \underline{U}_e = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \underline{U}_e.$$

On obtient alors $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$.

On peut faire apparaître la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et le facteur de

qualité $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$. On obtient alors la fonction de transfert sous sa forme canonique :

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}.$$

On constate que le dénominateur est un polynôme du second ordre en $j\omega$ car $(j\omega)^2 = -\omega^2$. On a donc un **filtre passe-bas du second ordre**.

3.3 Diagrammes de Bode

a) Diagramme de Bode du gain en décibel

On a $G = |\underline{H}(x)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$. On constate que G passe par un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (voir cours

sur le circuit RLC en régime sinusoïdal forcé). On retrouve la résonance en tension aux bornes du condensateur. On a déjà vu que la pulsation réduite de résonance vaut $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

Le gain en décibel vaut $G_{dB} = 20 \log G = -10 \log \left((1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \right)$.

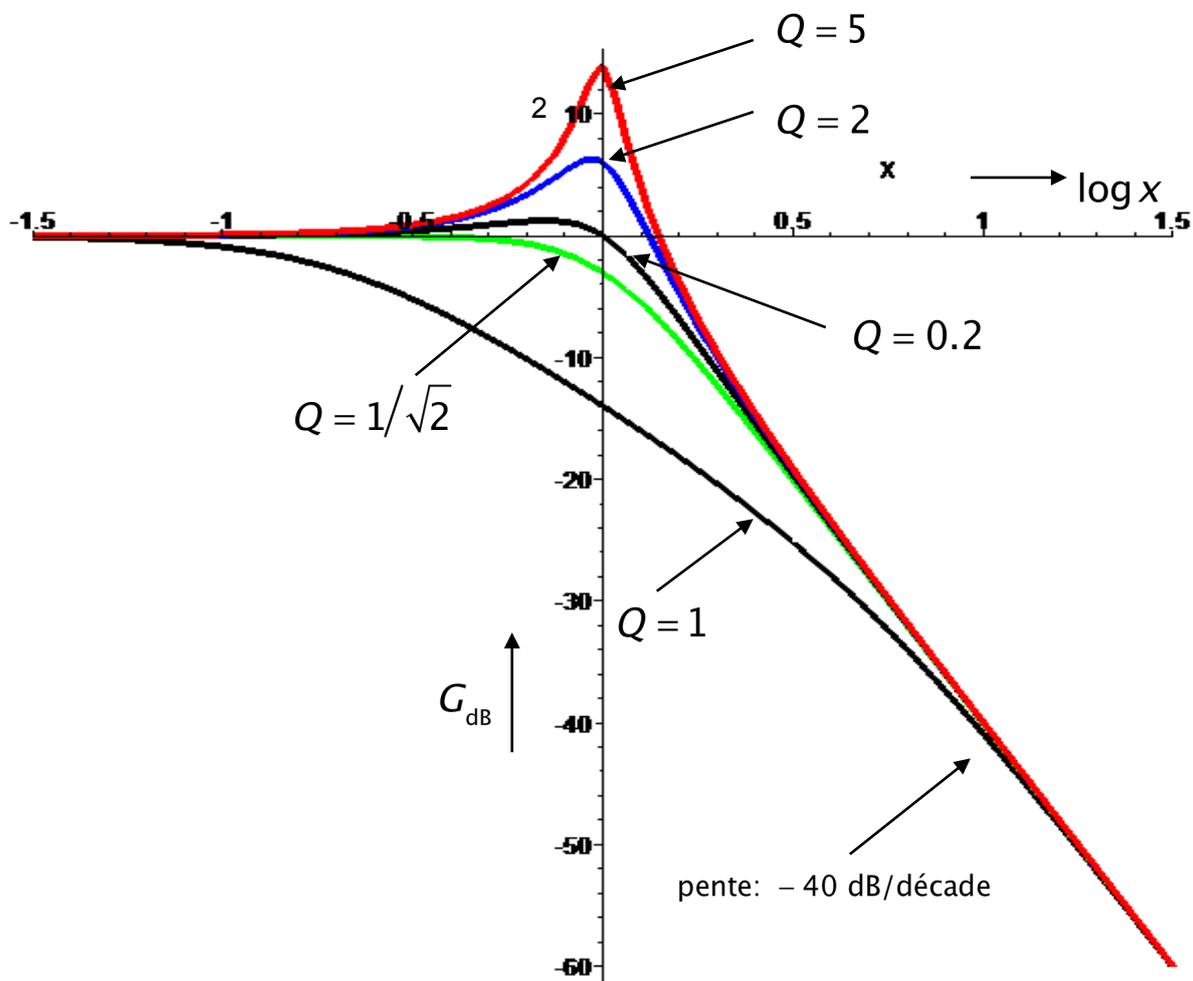
Étudions le comportement asymptotique du gain en décibel :

- $x \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow 0 \quad \log x \rightarrow -\infty \quad G_{dB} \rightarrow 0$

- $x \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty \quad \log x \rightarrow \infty \quad G_{dB} \rightarrow -10 \log \left(x^4 + \frac{x^2}{Q^2} \right) = -40 \log x$

A haute fréquence, la courbe de réponse en gain admet une **asymptote** passant par l'origine et de pente -40 dB/décade.

On obtient la courbe suivante (réalisée avec Maple) :



La pente de l'asymptote est deux fois plus importante que pour un filtre d'ordre 1, les hautes fréquences sont beaucoup plus atténuées, **le filtre est plus sélectif**, c'est l'intérêt d'un filtre du deuxième ordre.

b) Diagramme de Bode de la phase

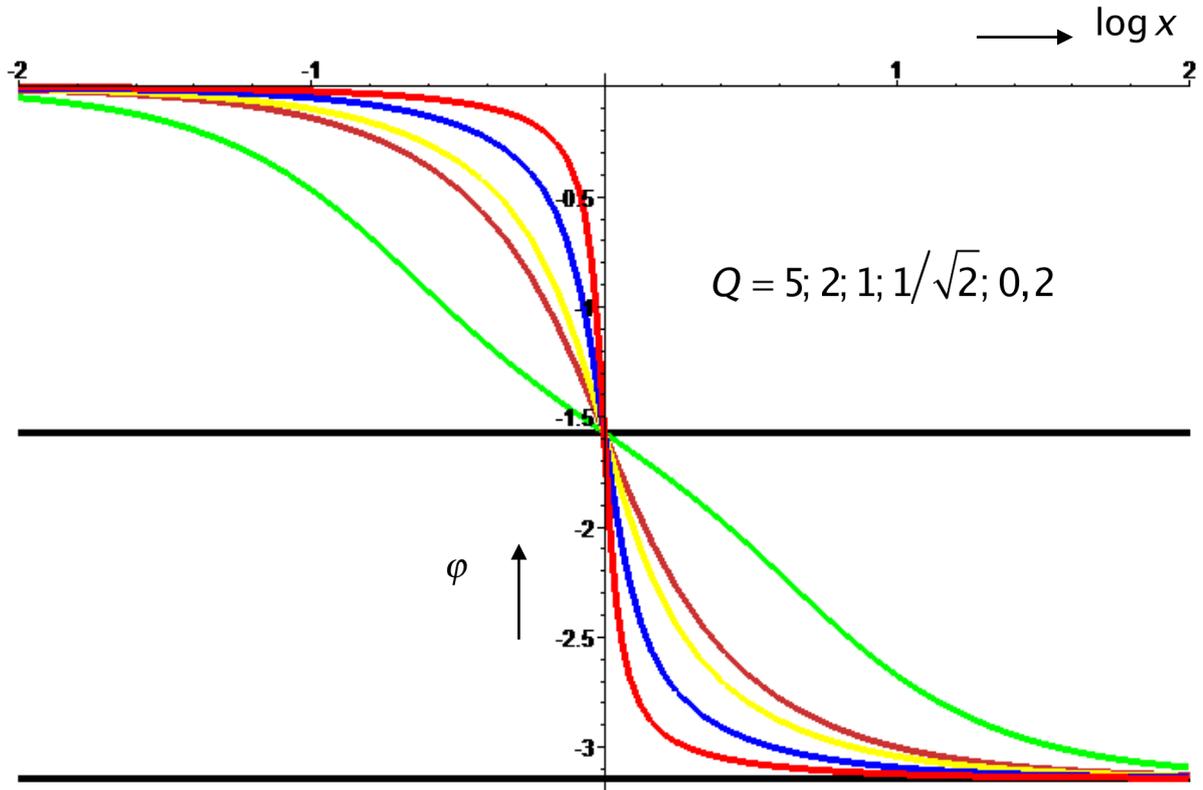
on a $\tan \varphi(x) = -\frac{x}{Q(1-x^2)}$.

- $x \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow 0 \quad \log x \rightarrow -\infty \quad \varphi \rightarrow 0$
- $x \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty \quad \log x \rightarrow \infty \quad \varphi \rightarrow -\pi$

ATTENTION : Ce cas est un peu délicat. En effet la fonction \tan est définie à π près. On a déjà traité cette situation dans le cours sur le circuit *RLC* en régime sinusoïdal forcé.

- $x = 1 \quad \omega = \omega_0 \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$

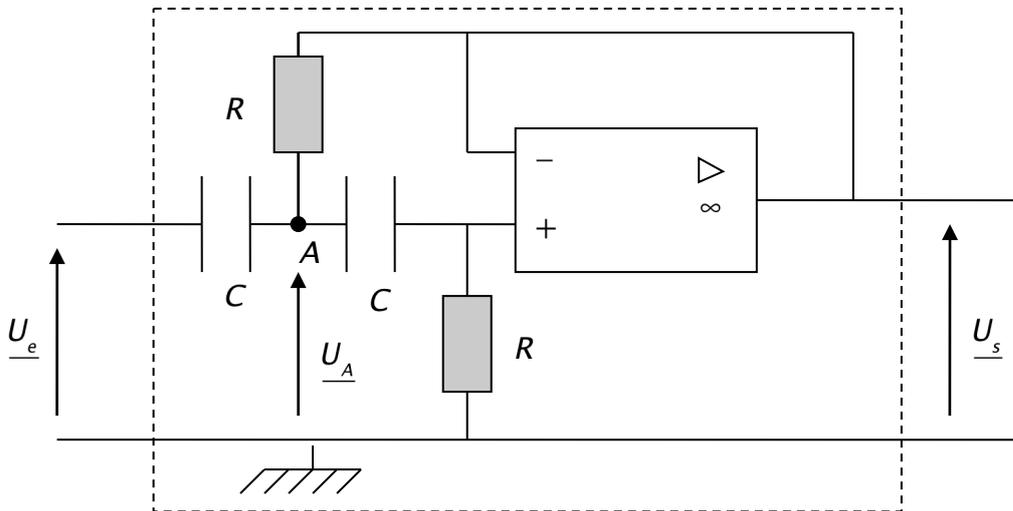
On obtient la courbe suivante (réalisée avec Maple) :



IV – FILTRE ACTIF DU 2^{EME} ORDRE PASSE-HAUT

4.1 Montage et comportement limite du filtre

Nous allons étudier le quadripôle suivant. L'AO est utilisé en régime linéaire $\varepsilon = 0$.



Encore une fois, avant de calculer la fonction de transfert de ce filtre et de l'étudier en détail, il est instructif de regarder le comportement limite de ce filtre. Cela va déjà nous permettre de déterminer sa nature.

- $\omega \rightarrow 0 \quad |Z_C| = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty$

Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, le courant à l'entrée positive est nul donc $\underline{U}_+ = 0 = \underline{U}_- = \underline{U}_s$.

- $\omega \rightarrow \infty \quad |Z_C| = \frac{1}{\omega C} \rightarrow 0$

Le condensateur se comporte comme un fil sans résistance donc $\underline{U}_e = \underline{U}_- = \underline{U}_s$.

On en déduit que ce filtre ne laisse passer que les hautes fréquences, il s'agit donc **d'un filtre passe-haut**.

4.2 Fonction de transfert

On applique le **théorème de Millman** au nœud A : $\underline{U}_A = \frac{U_e jC\omega + \underline{U}_s / R + \underline{U}_+ jC\omega}{2jC\omega + 1/R}$. On a de plus

$$\underline{U}_+ = \underline{U}_- = \underline{U}_s \text{ ce qui donne } \underline{U}_A = \frac{U_e jC\omega + \underline{U}_s (1/R + jC\omega)}{2jC\omega + 1/R}.$$

On utilise le pont de diviseur de tension pour relier \underline{U}_A et \underline{U}_s : $\underline{U}_A \frac{R}{R + 1/jC\omega} = \underline{U}_+ = \underline{U}_s$.

On voit apparaître une pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et on note comme d'habitude $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation

réduite. Avec ces notations : $\underline{U}_A = \frac{1 + jx}{jx} \underline{U}_s$ et $\underline{U}_A = \frac{U_e jx + \underline{U}_s (1 + jx\omega)}{1 + 2jx}$.

Il ne reste plus, à présent, qu'à éliminer \underline{U}_A pour obtenir la fonction de transfert suivante :

$$\underline{H}(x) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = -\frac{x^2}{(1 + jx)^2}$$

On constate que le dénominateur et le numérateur sont des polynômes du second ordre en $j\omega$. On a donc un **filtre passe-haut du second ordre**.

4.3 Diagrammes de Bode

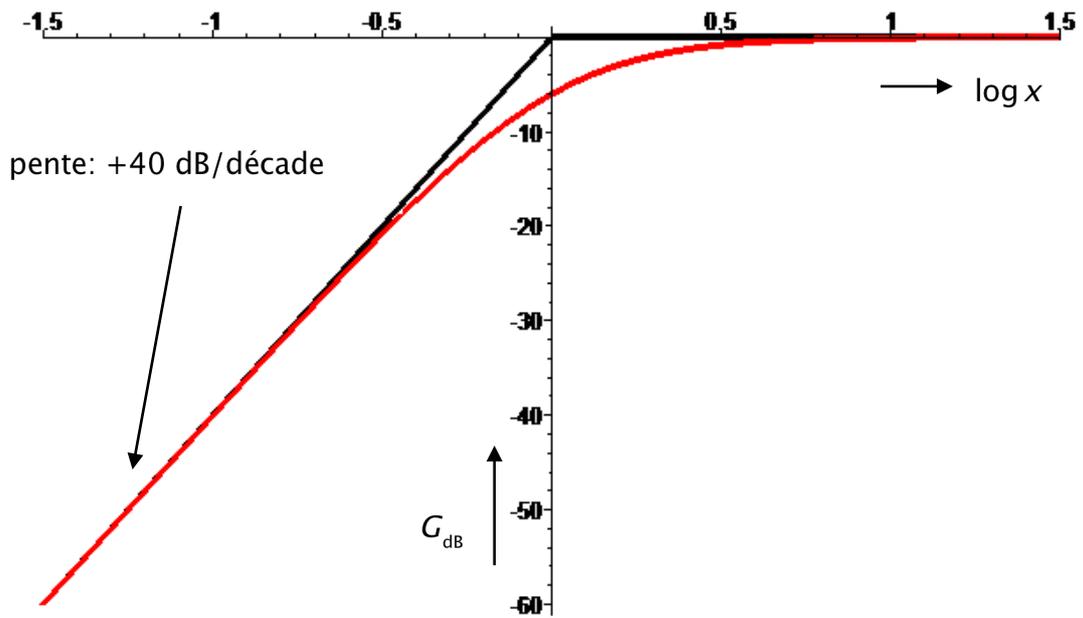
a) Diagramme de Bode du gain en décibel

$$\text{On a } G = |H(x)| = \frac{x^2}{1 + x^2} \text{ et } G_{\text{dB}} = -20 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

Etudions le comportement asymptotique du gain en décibel :

- $x \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow 0 \quad \log x \rightarrow -\infty \quad G_{\text{dB}} \rightarrow 40 \log x$
- $x \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty \quad \log x \rightarrow \infty \quad G_{\text{dB}} \rightarrow 0$
- $x = 1 \quad \omega = \omega_0 \quad G_{\text{dB}} = -20 \log 2 = -6$

On obtient la courbe suivante (réalisée avec Maple) :

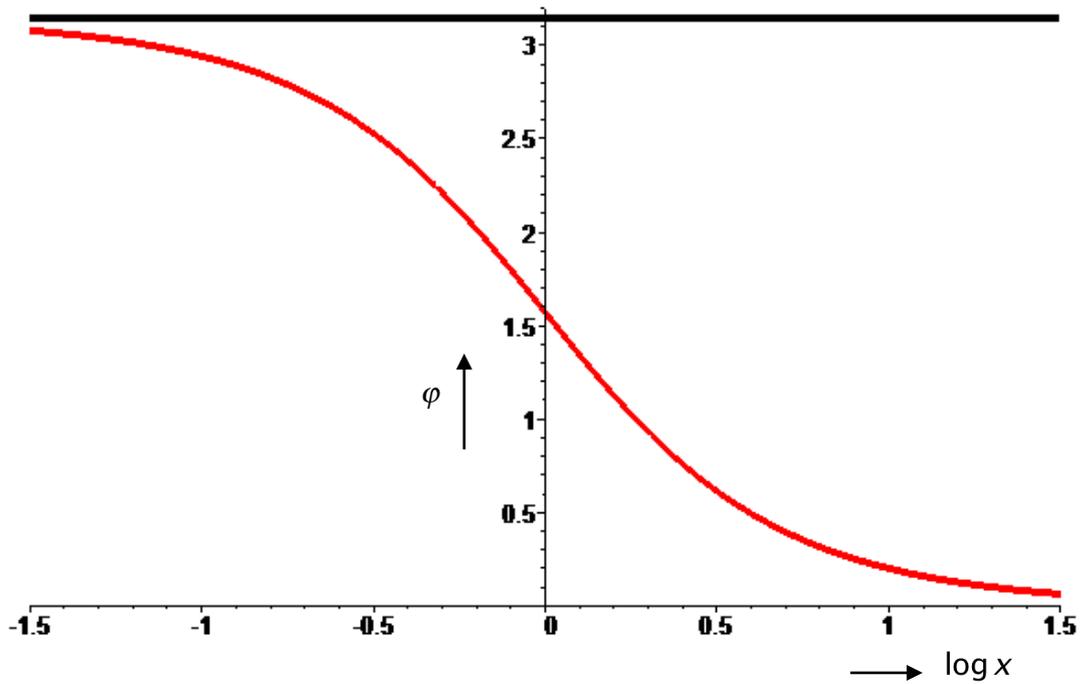


b) Diagramme de Bode de la phase

on a $\varphi(x) = \pi - 2\arg(1 + jx)$ soit $\varphi(x) = \pi - 2\arctan x$.

- $x \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow 0 \quad \log x \rightarrow -\infty \quad \varphi \rightarrow \pi$
- $x \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty \quad \log x \rightarrow \infty \quad \varphi \rightarrow 0$
- $x = 1 \quad \omega = \omega_0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

On obtient la courbe suivante (réalisée avec Maple) :

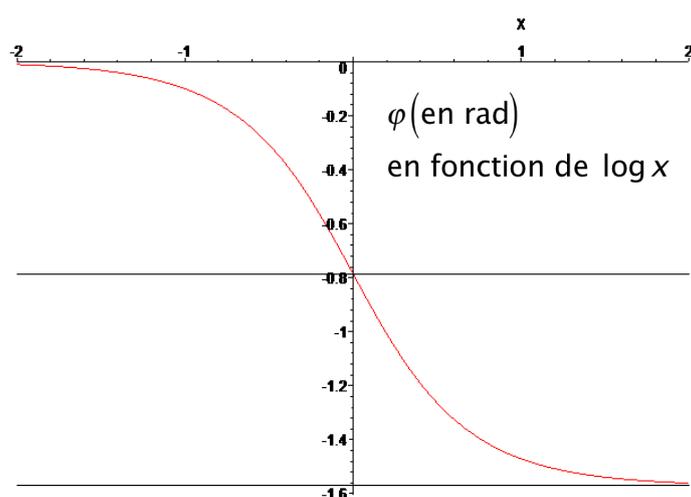
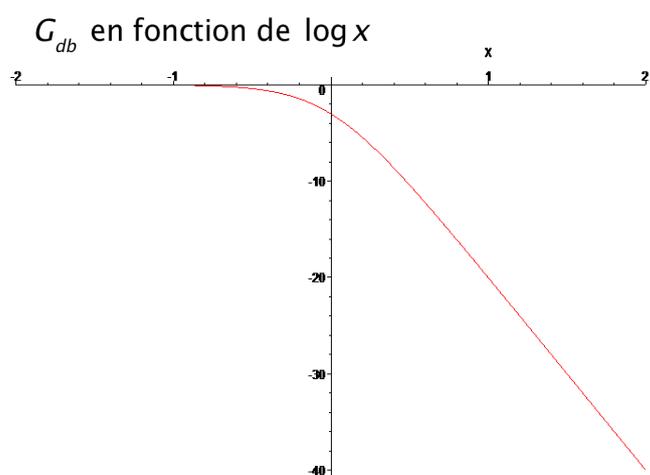


V - EXEMPLES DE FONCTIONS DE TRANSFERT USUELLES

Nous n'avons étudié que quelques filtres. Les résultats obtenus ne doivent pas être retenus par cœur, il faut avoir compris la démarche pour être capable d'analyser d'autres filtres. Dans cette partie, les diagrammes de Bode pour les fonctions de transfert les plus fréquemment rencontrées sont donnés. Les fonctions de transfert sont écrites sous forme canonique.

5-1 Filtre passe bas du 1^{er} ordre

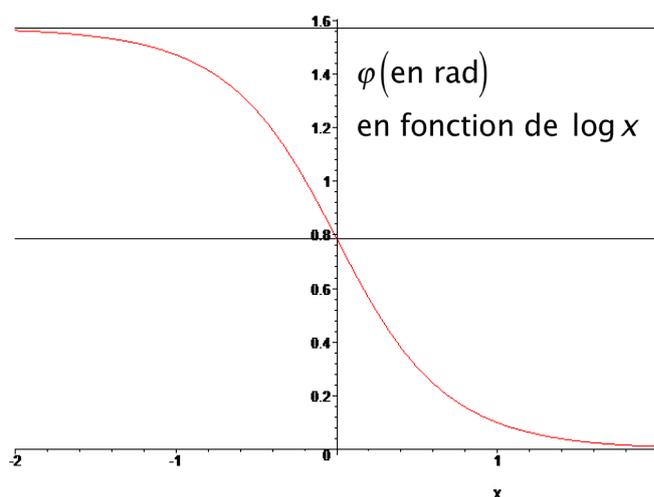
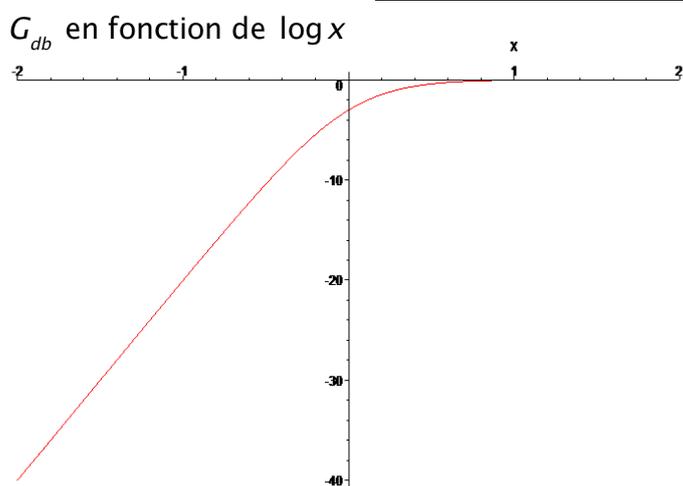
$$H(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0}{1 + jx}, A_0 \text{ réel}$$



Remarque : Pour réaliser les courbes (avec Maple), on a pris pour chaque filtre $A_0 = 1$.

5-2 Filtre passe haut du 1^{er} ordre

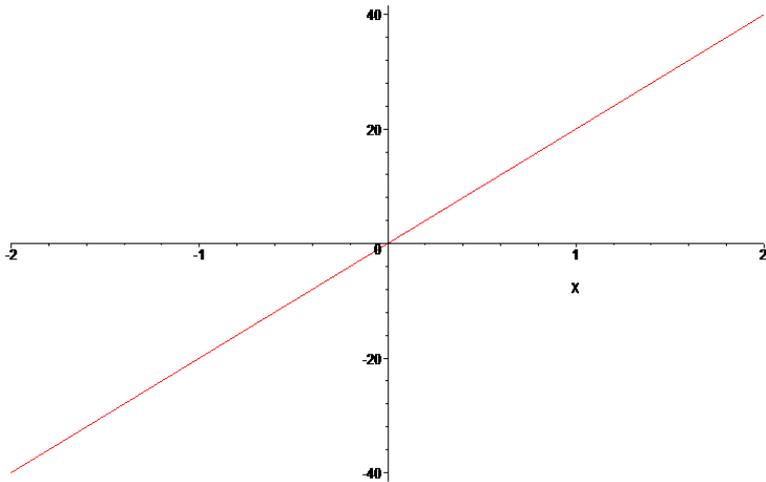
$$H(j\omega) = A_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = A_0 \frac{jx}{1 + jx} = A_0 \frac{1}{1 - \frac{j}{x}}, A_0 \text{ réel}$$



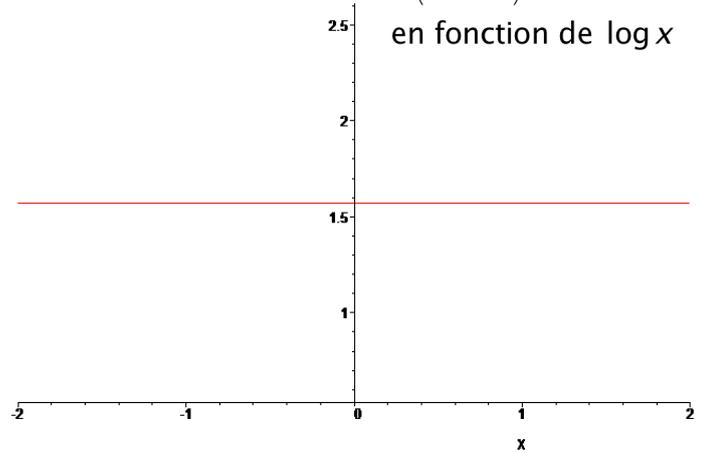
5-3 Filtre dérivateur

$$H(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0} = jx$$

G_{db} en fonction de $\log x$



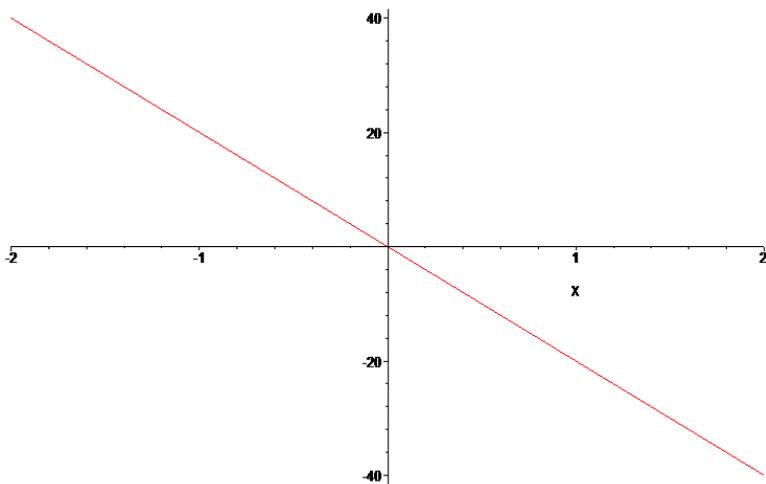
φ (en rad)
en fonction de $\log x$



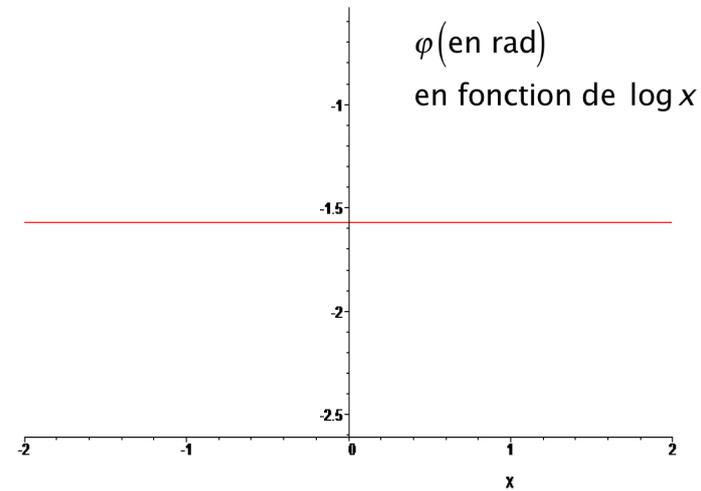
5-4 Filtre intégrateur

$$H(j\omega) = \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{jx}$$

G_{db} en fonction de $\log x$



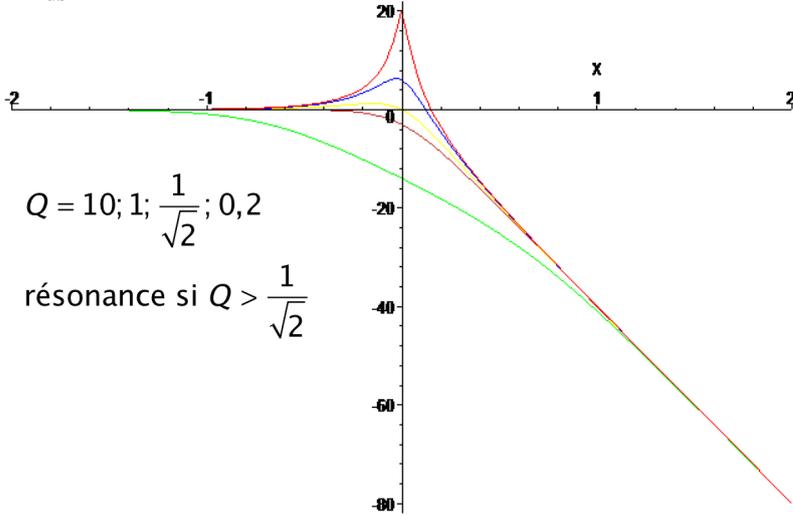
φ (en rad)
en fonction de $\log x$



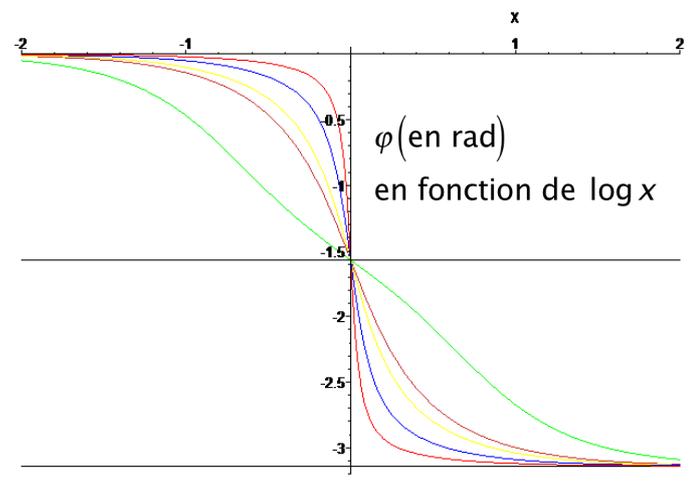
5-5 Filtre passe bas du 2^{ème} ordre

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} = \frac{A_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}, A_0 \text{ réel}$$

G_{db} en fonction de $\log x$



$Q = 10; 1; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0,2$
résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

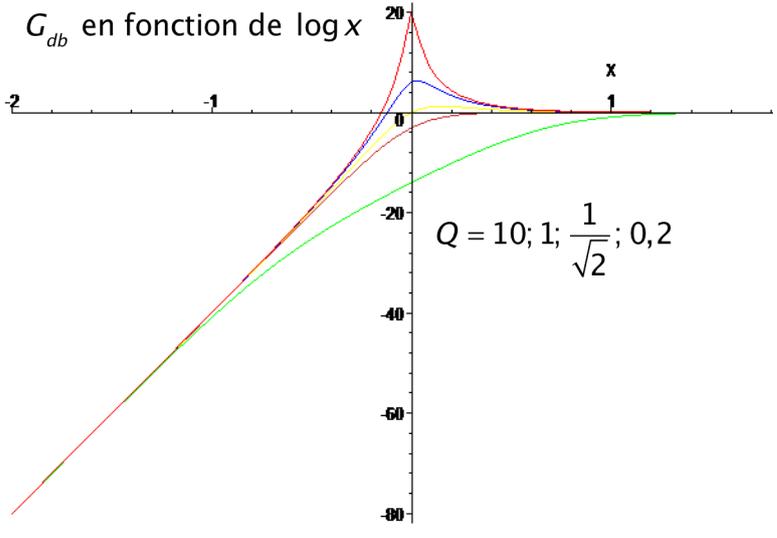


φ (en rad)
en fonction de $\log x$

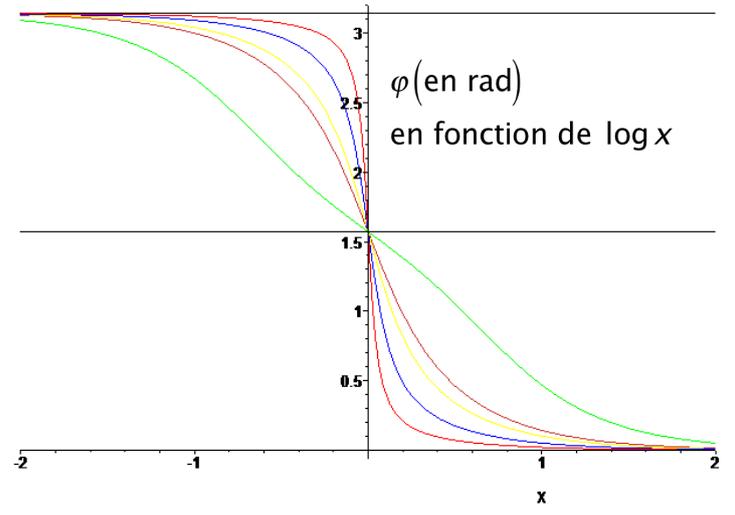
5-6 Filtre passe haut du 2^{ème} ordre

$$\underline{H}(j\omega) = -A_0 \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} = -A_0 \frac{x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}, A_0 \text{ réel}$$

G_{db} en fonction de $\log x$



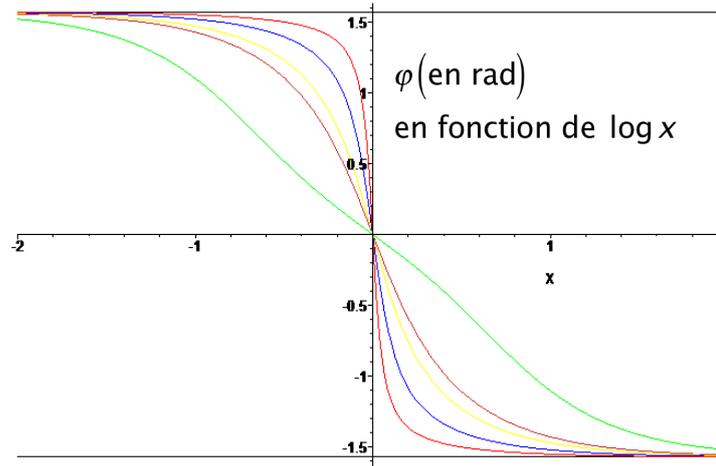
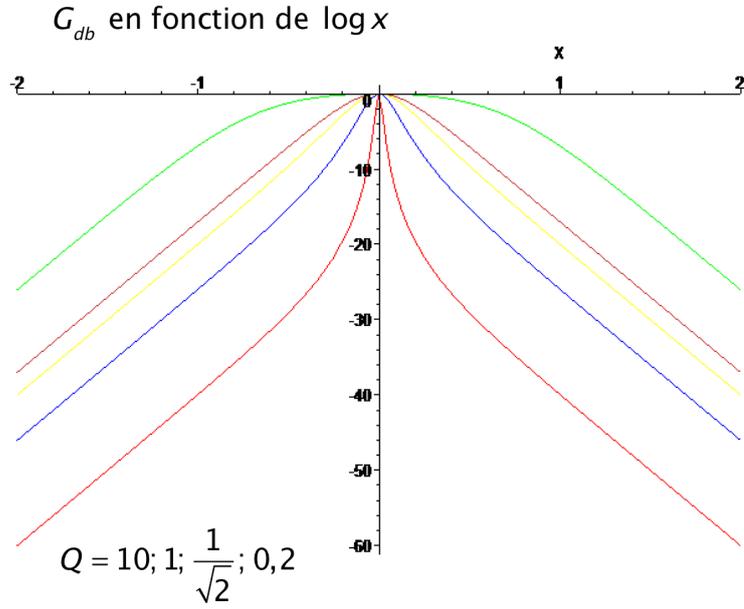
$Q = 10; 1; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0,2$



φ (en rad)
en fonction de $\log x$

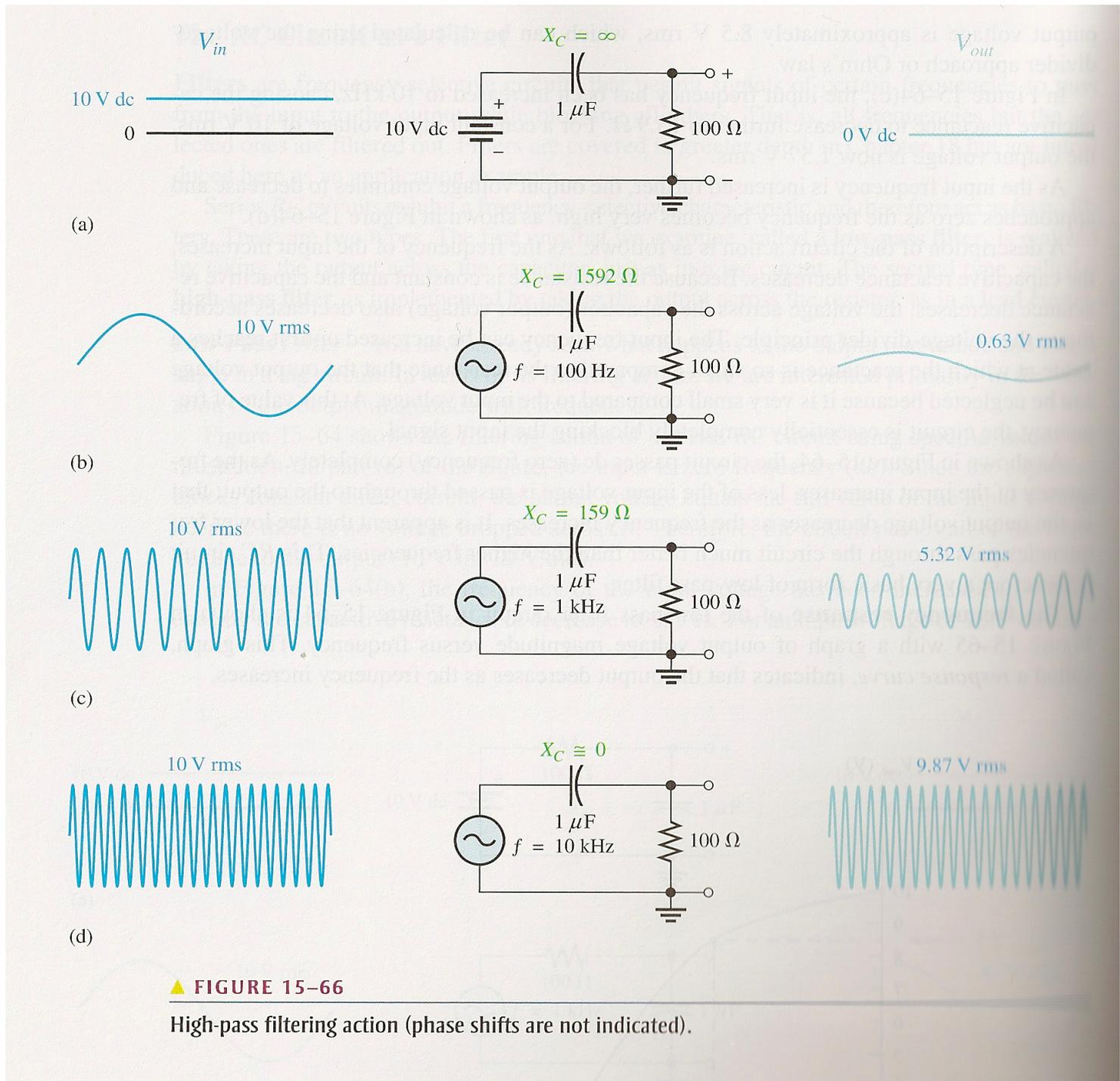
5-7 Filtre passe bande du 2^{ème} ordre

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0 j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} = \frac{A_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{A_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}, A_0 \text{ réel}$$

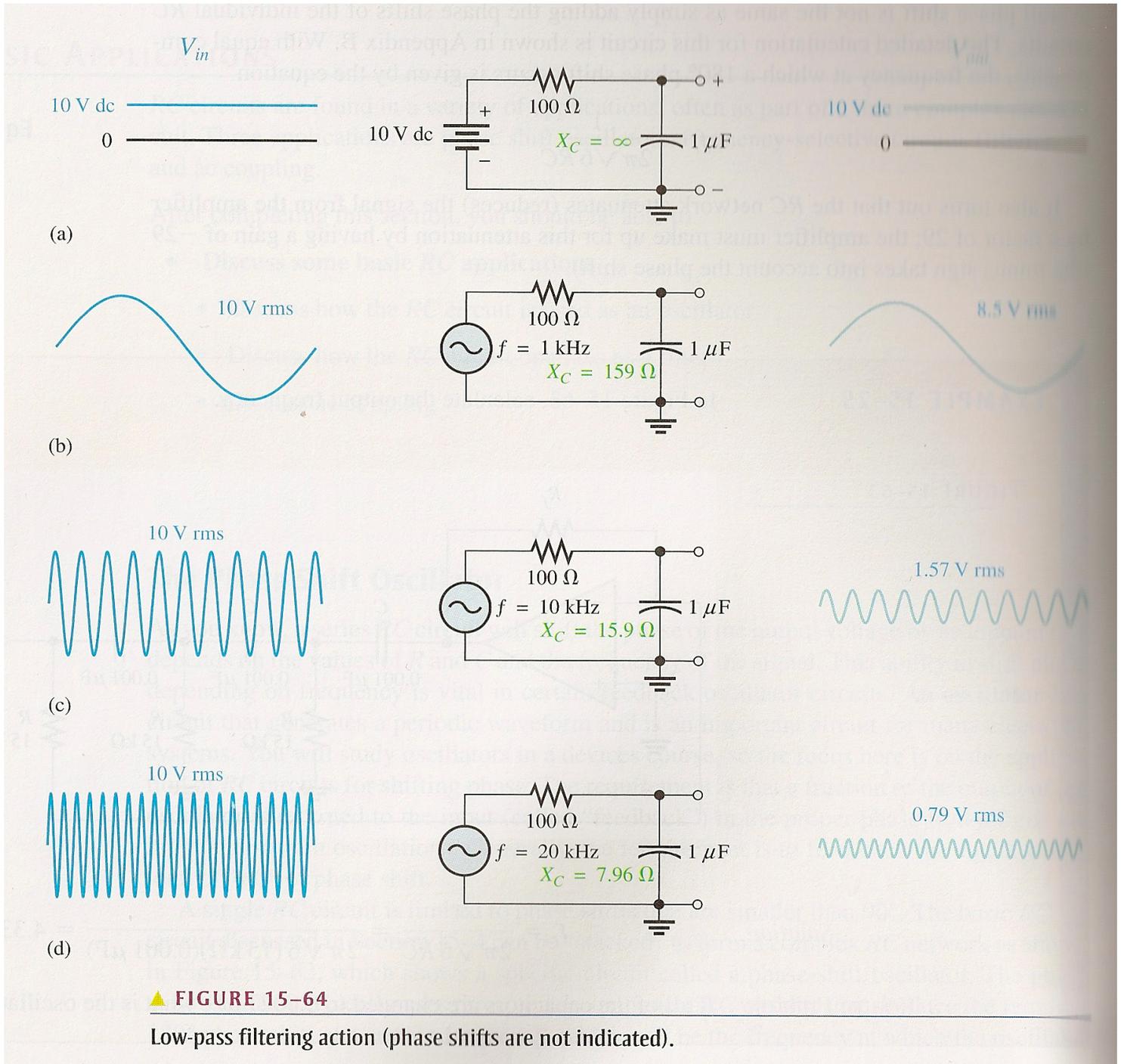


ANNEXE : Effet des filtres sur l'amplitude du signal

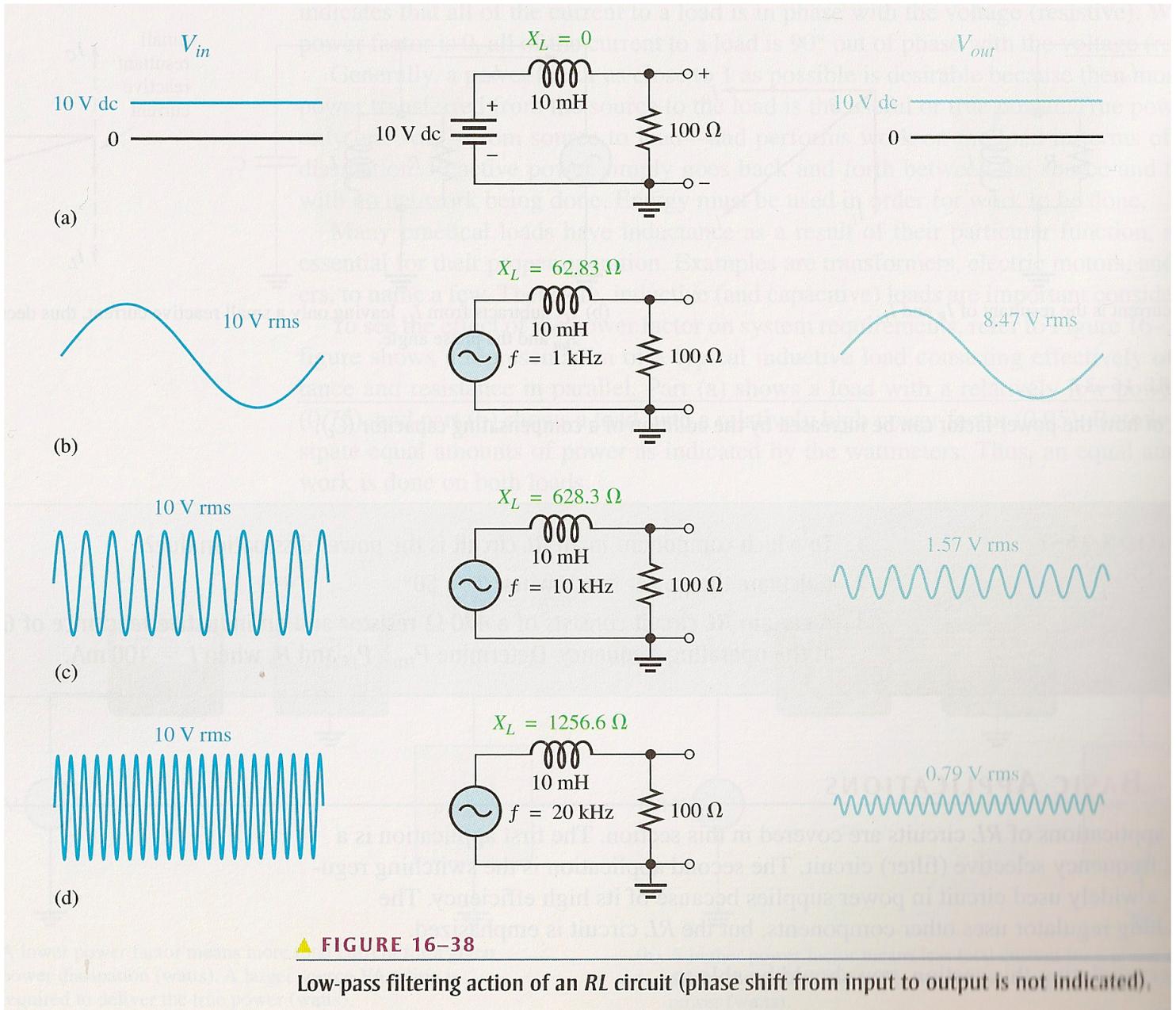
Filtre passe haut RC



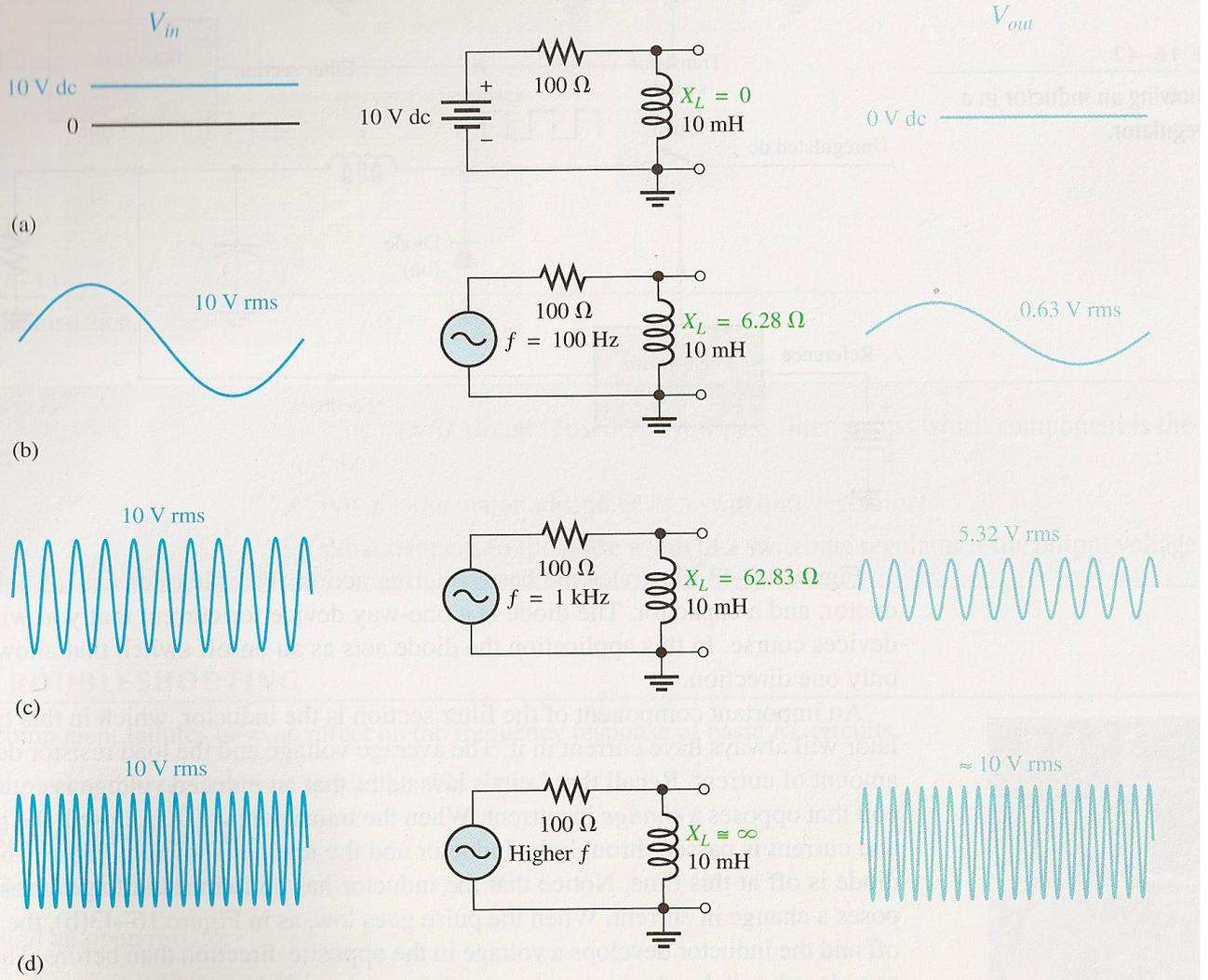
Filtre passe bas RC



Filtre passe bas RL



Filtre haut bas RL



▲ FIGURE 16-40

High-pass filtering action of an RL circuit (phase shift from input to output is not indicated).