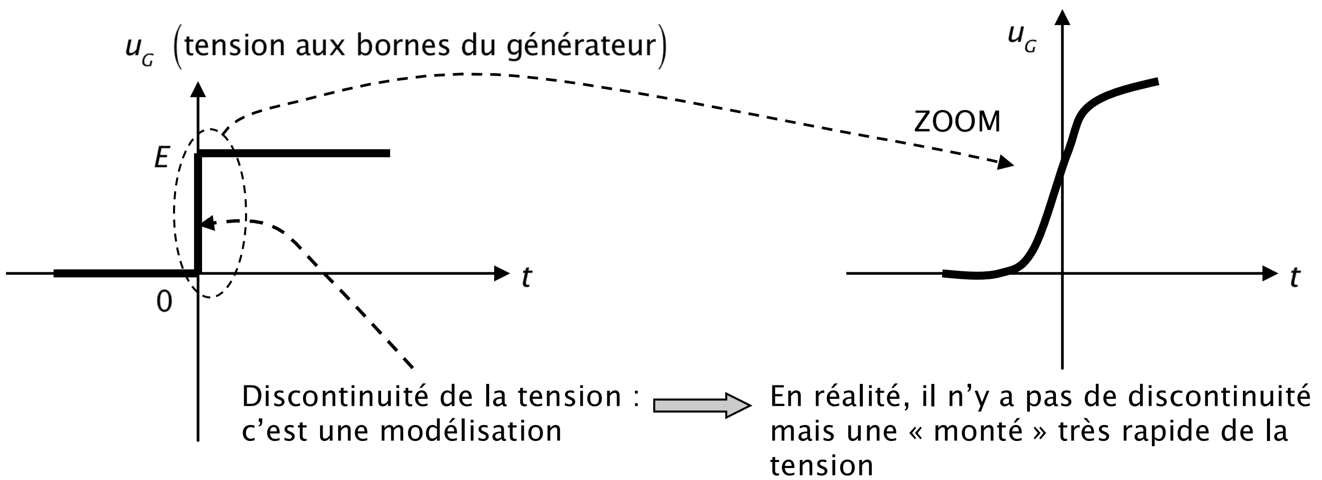
REPONSE DES CIRCUITS A UN ECHELON DE TENSION

« Un sourire coûte moins cher que l'électricité, mais donne autant de lumière »
L'Abbé Pierre

Dans les circuits électriques, les régimes ont toujours un début. Nous allons étudier comment à partir des conditions initiales, les courants et les tensions s'établissent dans les circuits.

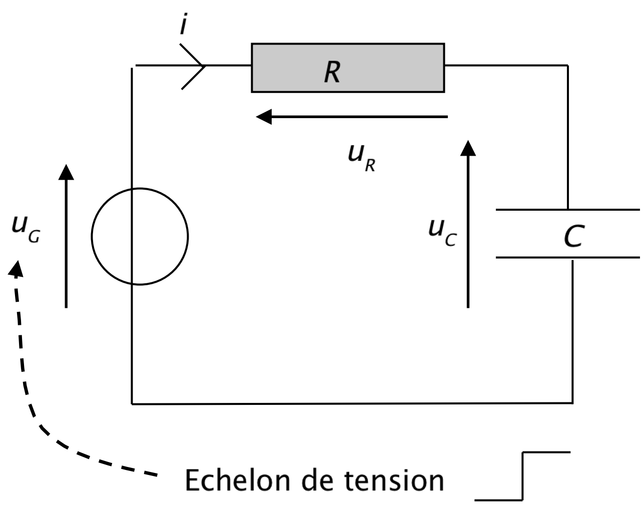
I – Echelon de tension

Nous allons appliquer à des circuits (RC série, RL série et RLC série) de façon soudaine, une tension continue E (on allume le générateur à $t = 0$). Cet effet est modélisé par un **échelon de tension** représenté sur la figure suivante :



II – Réponse à un échelon de tension d'un circuit d'ordre 1 : RC Série

2.1 Equation différentielle qui gouverne la tension aux bornes du condensateur



Loi des mailles : $E = u_C + u_R = u_C + R\,i$.

Caractéristique condensateur : $i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_C}{dt}$.

Ainsi : $E = u_C + RC\dfrac{du_C}{dt}$.

On constate que RC est homogène à un temps, on pose par définition :

$$\boxed{\tau \equiv RC = \text{constante de temps du circuit}}$$

On réécrit **l'équation différentielle du premier ordre** sous une forme canonique :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

2.2 Résolution de l'équation différentielle

a) condition initiale 1 : $t < 0 \quad u_C = U_0$: le condensateur est chargé

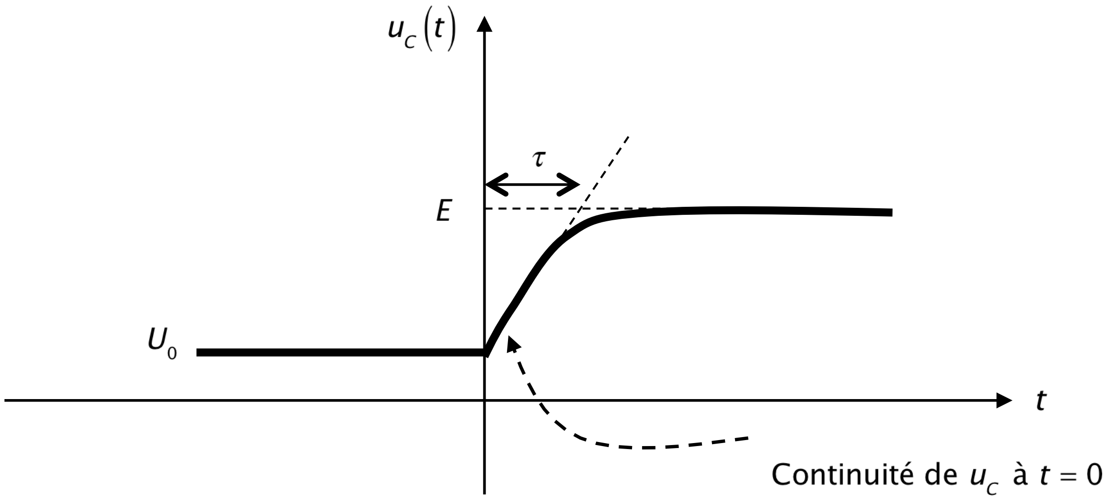
On va « séparer les variables » t et u_C.

$\frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C - E}{\tau} \Leftrightarrow \frac{du_C}{u_C - E} = -\frac{dt}{\tau}$, on intègre:

$\int_{U_0}^{u_C} \frac{du_C}{u_C - E} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt$ ce qui donne : $\ln\left(\frac{u_C - E}{U_0 - E}\right) = -\frac{t}{\tau}$ soit $u_C - E = (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}$. Pour résumer :

$$u_C(t) = \begin{cases} U_0 \text{ pour } t < 0 \\ E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

Nous constatons que $u_C(t)$ est **continue** à $t = 0$.



b) condition initiale 2 : $t < 0 \quad u_C = 0$: le condensateur est déchargé

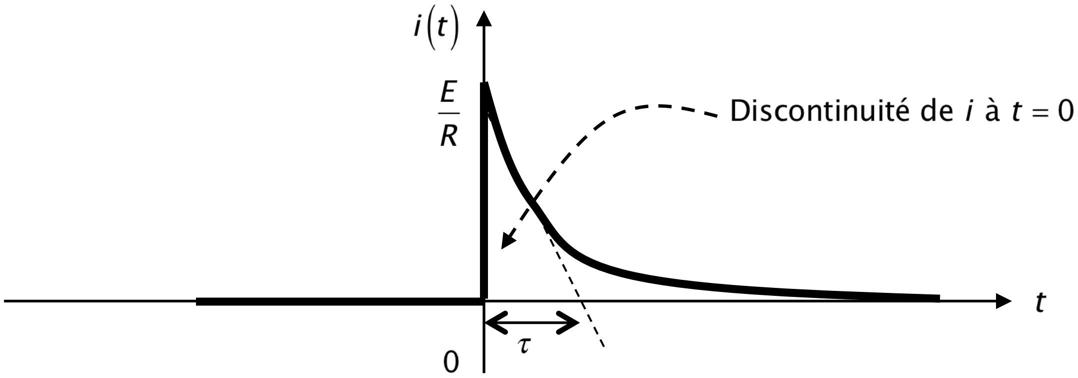
On procède comme en a) ce qui donne immédiatement :

$$u_C(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

Nous allons déterminer $i(t)$. $i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{C}{\tau}E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ pour $t > 0$ et $i(t) = 0$ pour $t < 0$.

$$\boxed{i(t)=\begin{cases}0 \text{ pour } t<0\\ \dfrac{C}{\tau}E\,e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ pour } t>0\end{cases}}$$

Nous constatons que $i(t)$ est **discontinue** à $t=0$.



Remarque : équation de la tangente

$\left.\dfrac{di}{dt}\right)_{t=0}=-\dfrac{1}{\tau}\dfrac{C}{\tau}E=-\dfrac{E}{R^2C}$. L'équation de la tangente s'écrit : $y=-\dfrac{E}{R^2C}t+cste$.

A $t=0$, $y=\dfrac{E}{R}=cste\Rightarrow y=\dfrac{E}{R}\left(1-\dfrac{1}{RC}t\right)$ et à $y=0$ $t=\tau=RC$. On retrouve l'interprétation graphique de la constante de temps.

2.3 Régime transitoire et régime permanent

Réponse complète du condensateur	=	réponse du régime TRANSITOIRE (partie temporaire)	+	réponse du régime PERMANENT (partie permanente)
⇓		⇓		⇓
$u_C(t)$	=	$(U_0-E)e^{-\frac{t}{\tau}}$	+	E

Quand $t\to+\infty$, $u_C=E$, C se comporte donc comme un **interrupteur ouvert**. La réponse du régime transitoire disparaît (meurt) rapidement, seule à long terme la réponse du régime permanent demeure.

On peut écrire la réponse complète $u_C(t)$ sous la forme suivante :

$$\boxed{u_C(t)=u_C(+\infty)+\left[u_C(0)-u_C(+\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Si l'instant initial est tel que $t = t_0 \neq 0$, on écrira :

$$u_C(t) = u_C(+\infty) + \left[u_C(t_0) - u_C(+\infty)\right] e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

En résumé, pour connaître la réponse d'un circuit RC à un échelon de tension, il faut connaître trois choses :

$\rightarrow$ La tension initiale aux bornes du condensateur $u_C(0)$.

$\rightarrow$ La tension finale aux bornes du condensateur $u_C(+\infty)$.

$\rightarrow$ La constante de temps du circuit τ.

2.4 Aspects énergétiques

- Energie stockée par le condensateur : $E_C = \int_0^{\infty} P_C(t)\,dt = \int_0^{\infty} u_C(t)\,i(t)\,dt$

On part de la condition initiale 2 : $t < 0 \quad u_C = 0$.

$$E_C = \int_0^{\infty} E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\frac{C}{\tau} E\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt = \left[-C E^2 e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{C E^2}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^{\infty} = C E^2 + \left(-\frac{C E^2}{2}\right) = \frac{C E^2}{2} > 0 .$$

On peut retrouver directement ce résultat avec $E_C = \frac{1}{2} C\, u_C{}^2$ avec $u_C = E$ quand $t \rightarrow +\infty$.

- Energie dissipée par la résistance : $E_R = \int_0^{\infty} P_R(t)\,dt = \int_0^{\infty} u_R(t)\,i(t)\,dt$

$$E_R = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}}\, dt = \left[-\frac{\tau}{2}\frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^{\infty} = \frac{RC\,E^2}{2R} = \frac{C E^2}{2} > 0 .$$

- Energie fournie par le générateur : $E_G = \int_0^{\infty} P_G(t)\,dt = \int_0^{\infty} -u_G(t)\,i(t)\,dt$

$$E_G = -\int_0^{\infty} \frac{E^2}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt = \left[C E^2 e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{\infty} = -C E^2 < 0 .$$

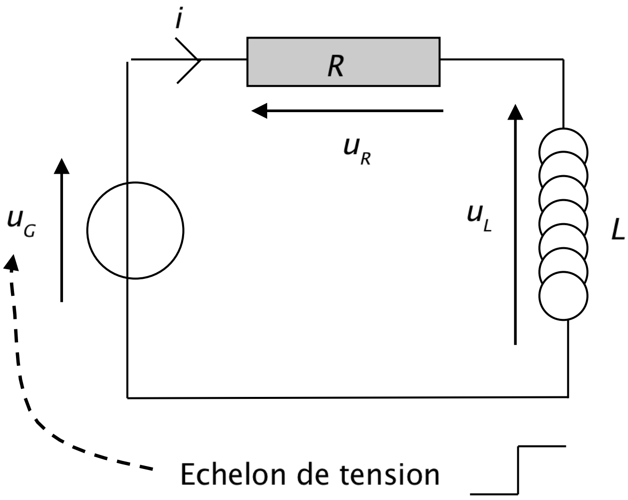
Le signe moins devant l'intégrale provient du fait que nous sommes en convention générateur. Par contre, le résultat final est physique, $E_G < 0$ car on a un générateur physique, il fournit de l'énergie au circuit. Pour conclure :

$$\text{Energie cédée par le générateur } \left(-CE^2 < 0\right) = \begin{cases} \text{Energie stockée par le condensateur} \\ \left(\frac{1}{2} CE^2 > 0\right) \\ + \\ \text{Energie reçue puis dissipée par la résistance} \\ \left(\frac{1}{2} CE^2 > 0\right) \end{cases}$$

Quelque soit la valeur de R, $E_R = E_C$. Si R est petit, i est important pendant un temps t court. Si R est grand, i est faible pendant un temps t long.

III – Réponse à un échelon de tension d'un circuit d'ordre 1 : *RL* Série

3.1 Equation différentielle qui gouverne l'intensité



Loi des mailles : $E = u_L + u_R = u_L + R\,i$.

Caractéristique de la bobine : $u_L = L\dfrac{di}{dt}$.

Ainsi : $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$.

On constate que $\dfrac{L}{R}$ est homogène à un temps, on pose par définition :

$$\boxed{\tau \equiv \frac{L}{R} = \text{constante de temps du circuit}}$$

On réécrit **l'équation différentielle du premier ordre** sous une forme canonique :

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}}$$

3.2 Résolution de l'équation différentielle

On procède comme dans le paragraphe 2.2.

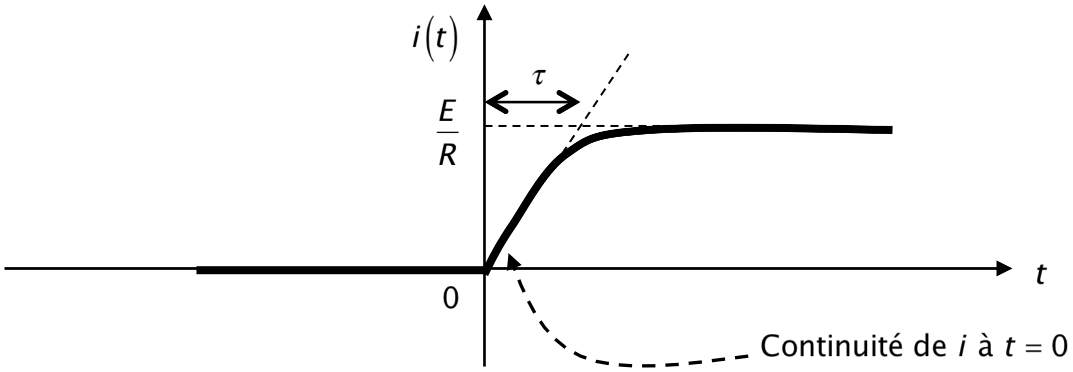
condition initiale : $t \leq 0 \quad i = 0$.

On peut « séparer les variables » comme dans le paragraphe 2.2 ou bien chercher la solution sous la forme (ce qui est équivalent d'un point de vu mathématique) :

$i(t) = \text{SGSSM}\left(A e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \text{SPASM}\left(\dfrac{E}{R}\right)$. A $t \leq 0$, $i = 0$ donc $A = -\dfrac{E}{R}$. Au final :

$$\boxed{i(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ pour } t > 0 \end{cases}}$$

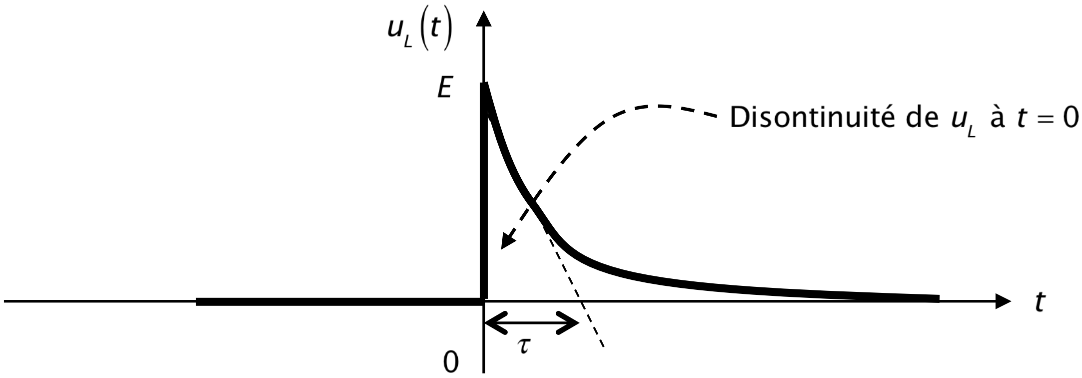
Nous constatons que $i(t)$ est **continue** à $t = 0$.



Nous allons déterminer $u_L(t)$. $u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{L}{\tau}\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$.

$$\boxed{u_L(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ E\,e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ pour } t > 0 \end{cases}}$$

Nous constatons que $u_L(t)$ est **discontinue** à $t = 0$.



3.3 Régime transitoire et régime permanent

Réponse complète du circuit en $i(t)$	=	réponse du régime TRANSITOIRE (partie temporaire) Maths $\Leftrightarrow$ SGSSM	+	réponse du régime PERMANENT (partie permanente) Maths $\Leftrightarrow$ SPASM
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
$i(t)$	=	$-\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$	+	$\frac{E}{R}$

Quand $t \to +\infty$, $i = \frac{E}{R}$, L se comporte donc comme un **fil sans résistance**. La réponse du régime transitoire disparaît (meurt) rapidement, seule à long terme la réponse du régime permanent demeure.

On peut écrire la réponse complète $i(t)$ sous la forme suivante :

$$\boxed{i(t) = i(+\infty) + \left[i(0) - i(+\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Si l'instant initial est tel que $t = t_0 \neq 0$, on écrira :

$$i(t) = i(+\infty) + \left[i(t_0) - i(+\infty)\right]e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

En résumé, pour connaître la réponse d'un circuit RL à un échelon de tension, il faut connaître trois choses :

→ L'intensité initiale du circuit $i(0)$.

→ L'intensité finale du circuit $i(+\infty)$.

→ La constante de temps du circuit τ.

3.4 Aspects énergétiques

- Energie stockée par la bobine: $E_L = \int_0^\infty P_L(t)dt = \int_0^\infty u_L(t)i(t)dt$

$$E_L = \int_0^\infty \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)E\,e^{-\frac{t}{\tau}}dt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)dt = \frac{E^2}{R}\left[-\tau\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^\infty + \frac{E^2}{R}\left[\frac{\tau}{2}e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^\infty = \frac{L\,E^2}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{L\,E^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{L\,E^2}{R^2} > 0$$

On peut retrouver directement ce résultat avec $E_L = \frac{1}{2}L\,i^2$ avec $i = \frac{E}{R}$ quand $t \to +\infty$.

- Energie dissipée par la résistance : $E_R = \int_0^\infty P_R(t)dt = \int_0^\infty u_R(t)i(t)dt$

$$E_R = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt = \frac{E^2}{R}\left[2\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^\infty + \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^\infty + \frac{E^2}{R}\left[t\right]_0^\infty = -\frac{2L\,E^2}{R^2} + \frac{L\,E^2}{2\,R^2} + \infty = -\frac{3}{2}\frac{L\,E^2}{R^2} + \boxed{\infty} > 0.$$

- Energie fournie par le générateur : $E_G = \int_0^\infty P_G(t)dt = \int_0^\infty -u_G(t)i(t)dt$

$$E_G = -\frac{E^2}{R}\int_0^\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt = -\frac{E^2}{R}\left[\tau\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^\infty - \frac{E^2}{R}\left[t\right]_0^\infty = -\frac{LE^2}{R^2} - \boxed{\infty} < 0.$$

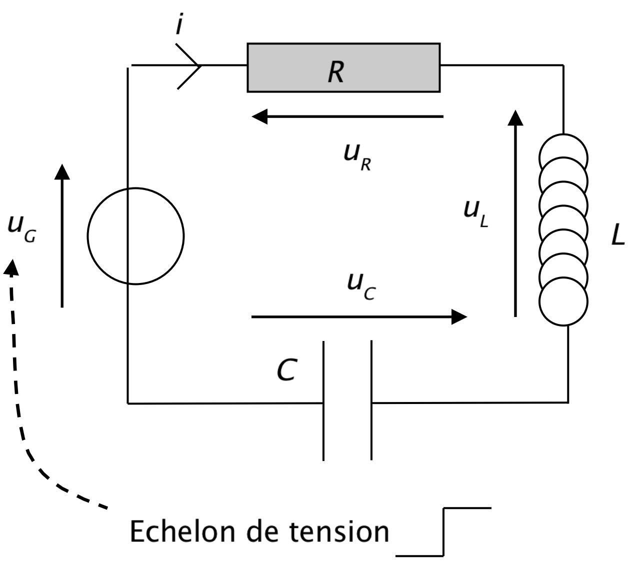
Quand $t \to +\infty$, la bobine devient un fil et le générateur doit en permanence compenser les pertes d'énergie dues à la résistance. Dans la réalité, le générateur ne fonctionne pas indéfiniment. Cela se traduit mathématiquement par le fait que l'on n'intègre pas jusqu'à l'infini mais jusqu'à un temps fini.

Pour conclure :

$$\text{Energie cédée par le générateur } (-\infty < 0) = \begin{cases} \text{Energie stockée par la bobine} \\ \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{LE^2}{R^2} > 0\right) \\ + \\ \text{Energie reçue puis dissipée par la résistance} \\ (+\infty > 0) \end{cases}$$

IV – Réponse à un échelon de tension d'un circuit d'ordre 2 : *RLC* Série

4.1 Equation différentielle qui gouverne la tension aux bornes du condensateur



Loi des mailles : $E = Ri + L\dfrac{di}{dt} + u_C$.

$i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_C}{dt}$ soit :

$$\boxed{LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E}$$

On obtient une **équation différentielle du second ordre.**

4.2 Ecriture canonique et résolution

L'équation différentielle précédente peut se mettre, comme en mécanique, sous les formes canoniques usuelles :

$\ddot{u}_C + \dfrac{1}{\tau}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$	$\omega_0 \equiv \sqrt{\dfrac{1}{LC}} =$ pulsation propre , $\tau \equiv \dfrac{L}{R} =$ temps de relaxation
$\ddot{u}_C + 2\beta\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$	$2\beta \equiv \dfrac{1}{\tau} =$ coefficient d'amortissement
$\ddot{u}_C + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$	$Q = \omega_0\tau = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} =$ facteur de qualité (sans dimension)

La réponse complète du circuit à l'échelon, c'est-à-dire $u_C(t)$ peut se mettre, comme on l'a vu précédemment, sous la forme :

$$\text{Réponse complète} : u_C(t) = \begin{cases} \underbrace{\text{réponse du régime transitoire} : u_{C\,tr}(t)}_{\substack{\text{Partie temporaire du circuit} \\ \text{Maths} \Rightarrow \text{SGSSM}}} \\ + \\ \underbrace{\text{réponse du régime permanent} : E}_{\substack{\text{Partie permanente du circuit} \\ \text{Maths} \Rightarrow \text{SPASM}}} \end{cases}$$

Il nous reste donc à trouver $u_{C\,tr}(t)$ ce qui est le plus délicat. Heureusement, nous avons déjà réalisé le travail en mécanique. Nous allons suivre la même démarche, il s'agit d'un simple copier-coller.

$u_{C\,tr}(t)$ est solution de l'équation différentielle du second ordre sans second membre $\ddot{u}_{C\,tr} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_{C\,tr} + \omega_0{}^2 u_{C\,tr} = 0$. On cherche une solution de la forme e^{rt} que l'on réinjecte dans l'équation précédente. On arrive à **l'équation caractéristique** de la forme $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0{}^2 = 0$. Il s'agit à présent d'une équation algébrique. Dans le cas général, r admet deux solutions r_1 et r_2 qui sont complexes ou réelles, ce qui donne:

$$u_{C\,tr}(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t},$$

où A_1 et A_2 sont des constantes (complexes conjuguées car $u_{C\,tr}(t)$ doit être réelle) que l'on détermine à partir des conditions initiales du problème.

La nature de l'évolution de $u_{C\,tr}(t)$ va dépendre du facteur de qualité Q donc de l'amortissement du système. En effet selon la valeur de Q, la nature des racines r_1 et r_2 sera différente.

a) Régime ***pseudo périodique*** : $\boxed{Q > \frac{1}{2}}$

Si $Q > \frac{1}{2}$ alors $\beta < \omega_0$. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique :

$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0{}^2 = \omega_0{}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0$. On pose $\omega^2 = \omega_0{}^2 - \beta^2$ avec ω la **pseudo-pulsation.**

$$\Delta = \omega_0{}^2\left(\frac{4\beta^2}{\omega_0{}^2} - 4\right) = 4\left(\beta^2 - \omega_0{}^2\right) = -4\omega^2 < 0$$

On obtient : $\begin{cases} r_1 = \dfrac{-\dfrac{\omega_0}{Q} - j2\omega}{2} = -\beta - j\omega \\ r_2 = -\beta + j\omega \end{cases}$ et finalement :

$$u_{C\,tr}(t) = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{-j\omega t} + A_2 e^{j\omega t}\right).$$

On sait que $\cos(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ et $\sin(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$ ce qui permet de réécrire la solution sous les formes équivalentes suivantes :

$$u_{C\,tr}(t) = \underbrace{e^{-\beta t}}_{\substack{\text{décroissante exponentielle de} \\ \text{l'amplitude.} \\ \text{(l'energie du système diminue)}}} \underbrace{\big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big)}_{\text{facteur oscillant à la pseudo-pulsation } \omega} = C\,e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

A, B, C et φ sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (tension initiale $u_C(0)$ et intensité initiale $i(0)$, par exemple $i(0) = 0$ A et $u_C(0) = 0$ V si le condensateur est déchargé à l'instant initial).

Le système oscille, mais sans être périodique à cause de l'amortissement, jusqu'à ce que le régime transitoire meure pour laisser place au régime permanent. On a un mouvement pseudo-périodique de pseudo-période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2Q}\right)^2}}}.$$

b) Régime ***apériodique*** : $\boxed{Q < \frac{1}{2}}$

Si $Q < \dfrac{1}{2}$ alors $\beta > \omega_0$.

On pose $\omega^2 = \beta^2 - \omega_0^{\,2}$ avec ω la **pseudo-pulsation.**

$\Delta = 4\omega^2 > 0$

On obtient : $\begin{cases} r_1 = -\beta - \omega \\ r_2 = -\beta + \omega \end{cases}$ et finalement :

$$u_{C\,tr}(t) = e^{-\beta t}\underbrace{\left(A_1 e^{-\omega t} + A_2 e^{\omega t}\right)}_{\text{termes purement exponentiels}}$$

A_1 et A_2 sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (tension initiale $u_C(0)$ et intensité initiale $i(0)$).

Le circuit atteint le régime permanent sans osciller car l'amortissement est devenu trop important.

c) Régime ***critique***: $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$

Si $Q = \frac{1}{2}$ alors $\beta = \omega_0$.

$\Delta = 4\left(\alpha^2 - \omega_0^{\ 2}\right) = 0$. On peut écrire $\ddot{u}_{C\,tr} + 2\omega_0 \dot{u}_{C\,tr} + \omega_0^{\ 2} u_{C\,tr} = 0$ soit $\frac{d^2}{dt^2}\left(u_{C\,tr}(t)e^{\omega_0 t}\right) = 0$. $u_{C\,tr}(t)e^{\omega_0 t}$ est donc une fonction affine du temps $u_{C\,tr}(t)e^{\omega_0 t} = a + bt$ ce qui donne :

$$u_{C\,tr}(t) = (a + bt)e^{-\omega_0 t}$$

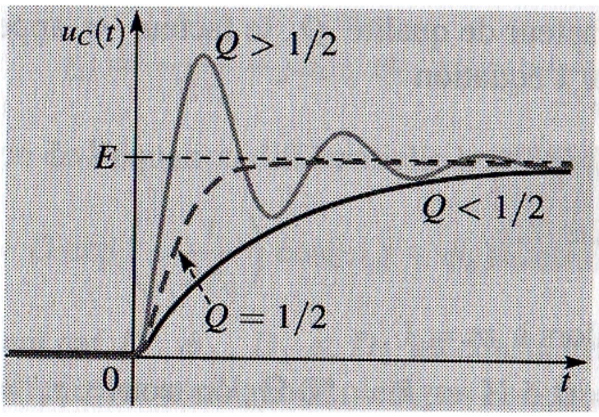
a et b sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (tension initiale $u_C(0)$ et intensité initiale $i(0)$).

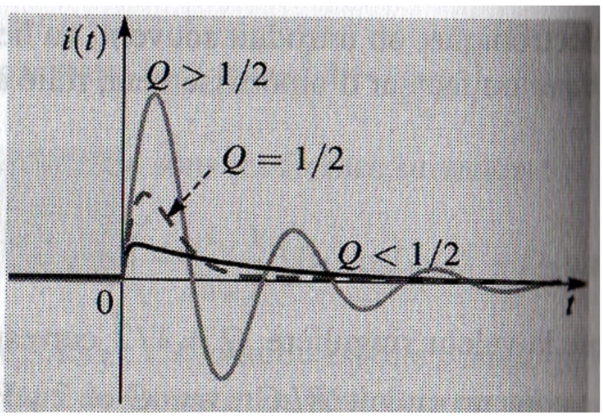
Quand $Q = \frac{1}{2}$ alors $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, on parle de **résistance critique**.

Le circuit atteint le régime permanent sans osciller car l'amortissement est devenu trop important. Il s'agit du cas où **l'équilibre (régime permanent) est atteint le plus rapidement**.

Les figures ci-dessous donnent l'évolution de $u_C(t) = u_{C\,tr}(t) + E$ et de $i(t)$ en fonction du temps.

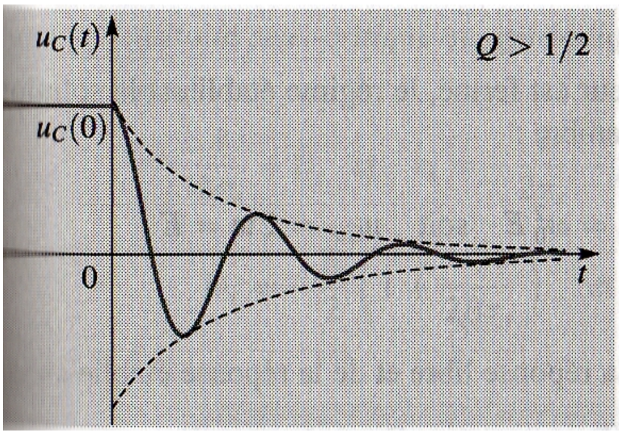
Pour obtenir $i(t)$, il suffit de noter que $i(t) = C\frac{du_{C\,tr}(t)}{dt}$.

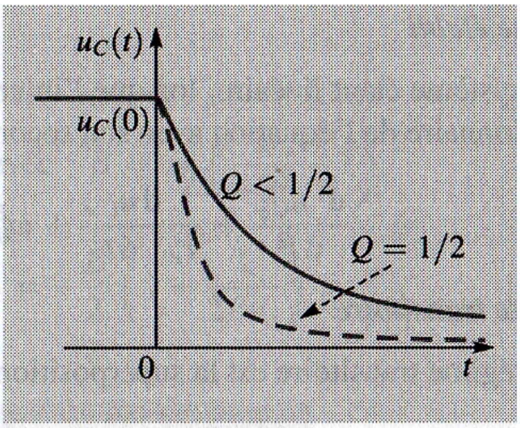




Quand $t \to \infty$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil sans résistance (bobine idéale) donc $i \to 0$ et $u_C \to E$.

Si, à partir de ces nouvelles conditions initiales ($u_C(0) = E$, $i(0) = 0$), on débranche le générateur ($u_G = 0$), alors u_C évolue comme indiqué sur les figures ci-dessous en fonction de la valeur du facteur de qualité (en suivant exactement la même démarche que ce que l'on a fait jusqu'à présent, vous pouvez résoudre ce problème).





4.3 Aspects énergétiques

a) Réponse à l'échelon de tension

On repart de l'équation différentielle sous sa forme initiale: $LC\ddot{u}_C + RC\dot{u}_C + u_C = E$ soit $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E$. On multiplie par i de chaque côté ce qui donne : $L\frac{di}{dt}i + Ri^2 + \frac{q}{C}i = Ei$ que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{\substack{\text{énergie de la bobine}\\ \text{à un instant t}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}_{\substack{\text{énergie du condensateur}\\ \text{à un instant } t}}\right] = \underbrace{-Ri^2}_{\substack{\text{puissance dissipée}\\ \text{dans la résistance}\\ \text{(effet Joule)}}} + \underbrace{Ei}_{\substack{\text{puissance fournie}\\ \text{par le générateur}}}.$$

L'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur et la bobine et dissipée dans la résistance.

b) Condensateur initialement chargé, absence de générateur (décharge du condensateur)

Si on part des conditions initiales suivantes : $u_C(0) = E$, $i(0) = 0$ et $u_G = 0$ (courbes ci-dessus), on a :

$$\frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{\substack{\text{énergie de la bobine}\\ \text{à un instant } t}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}_{\substack{\text{énergie du condensateur}\\ \text{à un instant } t}}\right] = \underbrace{-Ri^2}_{\substack{\text{puissance dissipée}\\ \text{dans la résistance}\\ \text{(effet Joule)}}}.$$

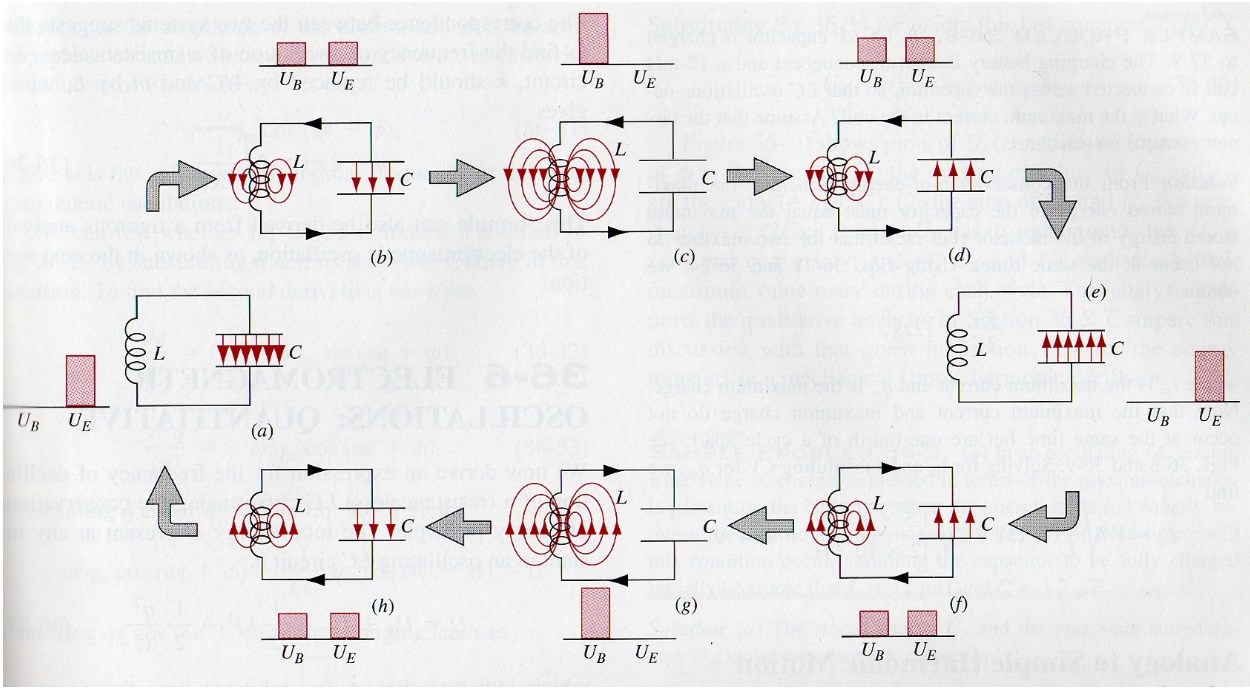
L'énergie stockée dans le condensateur et la bobine est entièrement dissipée à terme dans la résistance par effet Joule.

c) Condensateur initialement chargé, absence de générateur et absence de résistance.

Si il n'y pas de résistance dans le circuit ($R = 0$) alors :

$$\frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{\substack{\text{énergie de la bobine}\\ \text{à un instant } t}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}_{\substack{\text{énergie du condensateur}\\ \text{à un instant } t}}\right] = 0.$$

Dans ce cas $E_C + E_L = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ = constante au cours du temps. Il y a échange d'énergie permanent entre le condensateur et la bobine. Vous pouvez facilement montrer que $E_C + E_L = \frac{1}{2} C E^2$. La figure ci-dessous illustre cet échange d'énergie (ce qui est noté U_E correspond à l'énergie du condensateur $E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ et ce qui est noté U_B correspond à l'énergie de la bobine $E_L = \frac{1}{2} L i^2$).

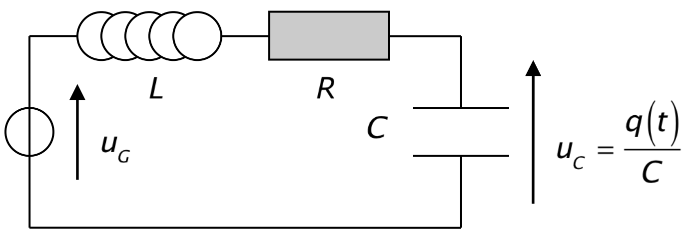


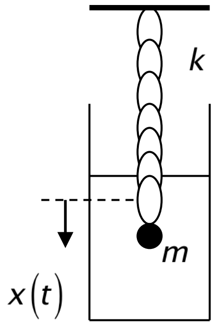
L'énergie présente dans le condensateur est due à la présence d'un champ électrique entre les armatures du condensateur qui est symbolisé par les flèches sur le schéma ci-dessus (cf. cours d'électrostatique en PTSI). L'énergie présente dans la bobine est due à la présence d'un champ magnétique dans les spires de la bobine qui est symbolisé par les flèches sur le schéma ci-dessus (cf. cours d'électromagnétisme en PT). On peut qualifier ce système **d'oscillateur électromagnétique** par analogie avec l'oscillateur mécanique (masse + ressort).

Enfin, pour terminer avec l'aspect énergétique, l'étude que nous avons menée dans le cas de l'oscillateur mécanique et qui nous a conduits à montrer que $Q = \left| 2\pi \frac{E_m}{\Delta E_m} \right|$ dans le cas d'un régime pseudopériodique peut se faire de façon totalement analogue dans le cas présent pour l'oscillateur électromagnétique.

V –Analogie électromagnétomécanique

Il y a analogie entre deux systèmes physiques s'ils sont régis par les mêmes équations différentielles.





Oscillateur électromagnétique	**Oscillateur mécanique**
$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=E$	$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+h\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=0$
Charge q	Elongation x
Intensité $i=\frac{dq}{dt}$	Vitesse $v=\frac{dx}{dt}$
Résistance R	Coefficient d'amortissement h
L	m
$\frac{1}{C}$	Raideur k
$u_L = L\frac{di}{dt}$	$m\frac{dv}{dt}$ (homogène à une force)
$E_{\text{bobine}} = \frac{1}{2}Li^2$	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$
$u_c = \frac{q}{C}$	$k\,x$ (homogène à une force)
$E_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	$E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$
$u_R = R\,i$	$h\,v$ (homogène à une force)
$P = R\,i^2$	$P = h\,v^2$