

RECAPITULATIFS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET DE LEURS SOLUTIONS

RENCONTREES DANS LE COURS DE PHYSIQUE-CHIMIE

(Le paramètre qui évolue dans le temps est noté x)

Equations différentielles	Exemples (non exhaustifs)	Solutions
Ordre 1 $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = a$ $x(0) = x_0$	- Vitesse d'un projectile soumis à son poids et à des frottements fluides. - Tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC soumis à un échelon de tension. - Concentration d'un réactif dans une réaction d'ordre 1.	$x(t) = \underbrace{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}_{\substack{\text{solution générale} \\ \text{sans second membre} \\ = \text{solution du régime transitoire}}} + \underbrace{\tau a}_{\substack{\text{solution particulière} \\ \text{avec second membre} \\ = \text{solution du régime permanent}}}$ $\tau a = x(\infty) \text{ et } A = x_0 - \tau a$
Ordre 2 (sans terme dissipatif) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ $x(0) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0) = v_0$	- Angle d'un pendule simple non amorti pour des petites oscillations. - Intensité dans un circuit LC sans résistance. - Position d'une masse accrochée à un ressort non amorti pour des petites oscillations.	$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \text{ et } \tan \varphi = \frac{-v_0}{\omega_0 x_0}$
Ordre 2 (avec terme dissipatif) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a$ $x(0) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0) = v_0$	- Angle d'un pendule simple amorti pour des petites oscillations. - Tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC soumis à un échelon de tension. - Position d'une masse accrochée à un ressort amorti pour des petites oscillations.	$x(t) = \underbrace{x_{tr}(t)}_{\substack{\text{solution générale} \\ \text{sans second membre} \\ = \text{solution du régime transitoire}}} + \underbrace{\frac{a}{\omega_0^2}}_{\substack{\text{solution particulière} \\ \text{avec second membre} \\ = \text{solution du régime permanent}}}$ $a/\omega_0^2 = x(\infty)$ - Si $Q > 1/2$: <u>régime pseudopériodique</u> $x_{tr}(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$ avec $2\beta = \omega_0/Q$ et $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ A et φ déterminées à partir des conditions initiales - Si $Q < 1/2$: <u>régime apériodique</u> $x_{tr}(t) = e^{-\beta t} (Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t})$ avec $2\beta = \omega_0/Q$ et $\omega^2 = \beta^2 - \omega_0^2$ A et B déterminées à partir des conditions initiales - Si $Q = 1/2$: <u>régime critique</u> $x_{tr}(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$ A et B déterminées à partir des conditions initiales
Ordre 2 (régime sinusoïdal forcé avec terme dissipatif) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a \cos(\omega_1 t)$ $x(0) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0) = v_0$	- Intensité dans un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé. - Position d'une masse accrochée à un ressort amorti en régime sinusoïdal forcé pour des petites oscillations.	$x(t) = \underbrace{x_{tr}(t)}_{\substack{\text{solution générale} \\ \text{sans second membre} \\ = \text{solution du régime transitoire}}} + \underbrace{x_{per}(t)}_{\substack{\text{solution particulière} \\ \text{avec second membre} \\ = \text{solution du régime permanent}}}$ $x_{tr}(t) \text{ idem cas précédent suivant les valeurs de } Q$ $x_{per}(t) = X_m \cos(\omega_1 t + \varphi)$ $X_m^2 = \frac{a^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega_1^2}{Q^2}} \text{ et } \varphi = \arctan\left(\frac{\omega_0 \omega_1}{Q(\omega_0^2 - \omega_1^2)}\right)$ Contrairement à $x_{tr}(t)$, $x_{per}(t)$ ne dépend pas des conditions initiales.

Autre équation différentielle $\frac{dx}{dt} + k \frac{dx^n}{dt} = 0$ $x(0) = x_0$	En chimie, une cinétique d'ordre n.	$\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{x_0^{n-1}} = (n-1)kt$ Résolution par la méthode de séparation des variables
Autre équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} - \omega_0^2 x = 0$ $x(0) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0) = v_0$	Mouvement d'un objet qui glisse sans frottement dans un tube en rotation uniforme.	$x(t) = A \cosh(\omega_0 t + \varphi)$ $A = \sqrt{x_0^2 - \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \text{ si } x_0^2 \geq \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 \text{ et } \tanh \varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}$

NB : Dans le cours de PT, vous allez rencontrer d'autres équations différentielles linéaires importantes dont les solutions analytiques sont connues : équation de diffusion de la chaleur, équation d'onde, les équations de Maxwell etc... Plus tard, vous rencontrerez peut-être l'équation de Schrödinger. Il faut cependant noter que les équations différentielles linéaires et qui admettent des solutions analytiques sont des exceptions (certes importantes). La plupart sont non linéaires et ne peuvent être résolues que de façon numérique ou appréhendées de façon qualitative.