

Mécanique du point et solutions aqueuses

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :

« La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. »

Problème 1: Mécanique et résonance (extrait concours Centrale, TSI, 2009)

Le problème analyse une expérience classique de travaux pratiques destinée à mettre en évidence un phénomène de résonance en mécanique. On considère un ressort vertical à spires non jointives dans son domaine de linéarité. Il est caractérisé par une masse linéique μ , une constante de raideur k , et un corps M , de masse m , est accroché à son extrémité inférieure. L'étude mécanique est faite dans le référentiel (R) du laboratoire supposé galiléen et les déplacements envisagés sont verticaux. On utilise les notations suivantes :

- \vec{e}_x , vecteur unitaire définissant la direction de l'axe $x'x$ et le sens de la verticale descendante,
- $\vec{g} = g\vec{e}_x$, champ de pesanteur uniforme,
- $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Grâce à un système bielle-manivelle on impose à l'extrémité supérieure du ressort le déplacement $X(t)\vec{e}_x = a\cos\omega t\vec{e}_x$, a et ω étant des constantes.

Grâce à un dispositif approprié (partie IV) on soumet M à une force de frottement fluide \vec{F}_f de la forme $\vec{F}_f = -h\vec{v}$, h étant une constante positive et \vec{v} représentant la vitesse de M . On impose toujours le déplacement $X(t) = a\cos\omega t$ à l'extrémité supérieure du ressort. On note

$$Q = \frac{m\omega_0}{h}$$

le facteur de qualité et on prend toujours $\mu = 0$.

II.A - Déterminer l'équation différentielle (E_3) du mouvement de M .

II.B - On s'intéresse à la solution en régime forcé. Quel est, en fonction de ω_0 et Q , l'ordre de grandeur du temps τ nécessaire pour considérer seulement cette solution ?

II.C - Montrer que l'amplitude A du déplacement de M s'exprime sous la forme :

$$A = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} Q^2}}.$$

II.D - Donner une interprétation physique du mouvement de M aux hautes et basses fréquences.

II.E - Montrer que, si Q est supérieur à une valeur minimale Q_{min} à déterminer, A prend une valeur maximale pour une pulsation ω_r à exprimer en fonction de ω_0 et Q .

II.F - Déterminer l'expression V de l'amplitude de la vitesse de M en fonction de a , ω , ω_0 et Q .

II.G - Donner une interprétation physique de la variation de V aux hautes et basses fréquences.

II.H - Montrer que V prend une valeur maximale pour une pulsation indépendante de Q .

II.I - Grâce à un capteur de position de M , on mesure une tension V_{pp} proportionnelle à l'amplitude A . À partir des valeurs expérimentales suivantes tracer les courbes représentant les variations de $V_{pp}(mV)$ et de $f \cdot V_{pp}(V \cdot Hz)$ en fonction de la fréquence $f(mHz)$.

Échelles : $1 V \leftrightarrow 2 \text{ cm}$, $1 V \cdot s^{-1} \leftrightarrow 1 \text{ cm}$, $1 Hz \leftrightarrow 4 \text{ cm}$.

V_{pp}	1844	1844	1844	1844	1906	2063	2281	2500	2906
f	156,3	213,9	287,8	412,4	615,4	869,6	1026	1250	1429
$f \cdot V_{pp}$	0,228	0,394	0,531	0,760	1,173	1,794	2,340	3,125	4,153
V_{pp}	3438	4094	4531	4938	5750	5906	5531	4188	3281
f	1613	1786	1887	1923	2128	2198	2299	2500	2597
$f \cdot V_{pp}$	5,545	7,312	8,550	9,496	12,24	12,98	12,71	10,47	8,521
V_{pp}	3250	2813	2344	1812	1469	1094	1062		
f	2632	2778	2857	3077	3361	3636	3704		
$f \cdot V_{pp}$	8,554	7,814	6,697	5,575	4,937	3,978	3,934		

II.J - À l'évolution de quelle grandeur physique accède-t-on en traçant la courbe représentant les variations de $f \cdot V_{pp}$ en fonction de f ?

II.K - Définir la bande passante Δf . Déterminer graphiquement Δf et la fréquence propre f_0 associées à la fonction de transfert $H_V : f \rightarrow f \cdot V_{pp}$. En déduire le facteur de qualité Q . Comparer ces valeurs aux résultats donnés par un logiciel de modélisation : $V_{pp}(0) = 1811 \pm 59 \text{ mV}$, $f_0 = 2228 \pm 12 \text{ mHz}$, $Q = 3,183 \pm 0,140$. Que penser du modèle proposé pour interpréter l'expérience ? Sachant que $m = 0,275 \text{ kg}$, calculer h .

II.L - Déterminer le schéma électrique équivalent, c'est-à-dire décrit par une équation différentielle du même type que (E_3), association d'une résistance R , d'une inductance L , d'une capacité C , alimentée par une source de courant idéale $I \cos \omega t$. Dresser un tableau d'analogies électromécaniques.

Problème 2: Piles à combustible (extrait « petites Mines », 2008)

C.II. Piles à combustible à méthanol direct

Des piles à combustible sont développées actuellement à partir de méthanol, nous étudierons celle à méthanol direct dans laquelle le méthanol est utilisé tel quel en tant que réducteur, l'oxydant étant

du dioxygène. Ces piles ne sont pas très puissantes mais elles ont de grandes autonomies et peuvent être utilisées dans des appareils portables (microordinateurs, téléphones ou autres). Elles fonctionnent à des températures relativement basses autour de 70 °C. Le biométhanol est obtenu à partir de la biomasse lignocellulosique en deux étapes : conversion en gaz de synthèse (mélange de CO et H₂) puis recombinaison en méthanol CH₃OH. Les électrodes sont en graphite, métal ou en matériaux composites. La membrane séparant les deux compartiments est une membrane échangeuse d'ions.

On note $e^{\circ} = \frac{RT}{F} \ln 10$ à la température de fonctionnement de la pile.

Q44. Écrire la demi-équation électronique correspondant à la demi-pile contenant le méthanol et en déduire l'expression du potentiel de Nernst E_1 correspondant.

Remarque : l'eau et le méthanol étant en quantités proches, leurs activités sont égales à leurs fractions molaires.

Q45. Écrire la demi-équation électronique correspondant à la demi-pile contenant le dioxygène et en déduire l'expression du potentiel de Nernst E_2 correspondant.

Remarque : l'eau étant ici le seul liquide, son activité est prise égale à 1.

Q46. Le courant circule dans le circuit, à l'extérieur de la pile, en partant de la demi-pile 2 vers la demi-pile 1. En déduire les polarités attendues de la pile et exprimer sa force électromotrice.

Q47. Indiquer en justifiant, quelle électrode est la cathode et laquelle est l'anode. En déduire la réaction qui se produit lorsque la pile débite.

Q48. Si on admet que le rendement d'une pile est de 80 %, exprimer la quantité d'électricité formée à partir de 10 mL de méthanol.

Q49. Pendant combien de temps pourrait fonctionner la pile, en admettant toujours un rendement de 80 %, lorsqu'elle délivre un courant d'intensité supposée constante de 10 A ? Conclure.

Données relatives à la partie de chimie :

Constantes d'acidité à 298 K :

CO_{2(aq)}/HCO₃⁻ : $pK_{a1} = 6,4$ et HCO₃⁻/CO₃²⁻ : $pK_{a2} = 10,3$.

DEAH⁺/DEA : $pK_a = 9,0$

H₂S/HS⁻ : $pK'_{a1} = 7,0$ HS⁻/S²⁻ : $pK'_{a2} = 13,0$

H₃PO₄/H₂PO₄⁻ : $pK_1 = 2,1$; H₂PO₄⁻/HPO₄²⁻ : $pK_2 = 7,2$; HPO₄²⁻/PO₄³⁻ : $pK_3 = 12,4$.

Enthalpies standard de formation à 300 K :

Composé (gaz)	H ₂ O	CO ₂	CH ₄
$\Delta_f H^{\circ}$ (kJ.mol ⁻¹)	- 240	- 390	- 110

Capacités thermiques molaires à pression constante à 300 K considérées comme constantes dans l'intervalle de température étudié :

composé	CH ₄ , N ₂ , O ₂ , H ₂ O	CO ₂
C_p° (J.K ⁻¹ .mol ⁻¹)	30	45

Potentiels standard des couples (à 298 K)

E_1° (CO₂/CH₃OH) = 0,02 V ; E_2° (O₂/H₂O) = 1,23 V.

F (le Faraday) $\approx 10^5$ C.mol⁻¹

Densité du méthanol : $d = 0,80$

Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1,0$ g.cm⁻³.

Masse molaire moléculaire du méthanol : $M_{m\acute{e}t} = 32$ g.mol⁻¹ (qu'on pourra arrondir à 30 pour simplifier les calculs numériques).

II - Étude des propriétés acido-basiques du solvant eau

A - Étude à la température de 25°C

(température correspondant sensiblement à 298 K)

On considère une solution aqueuse S_1 d'hydroxyde de sodium à 10 moles par litre, et une solution aqueuse S_2 d'acide chlorhydrique à 0,02 mole par litre.

1°) Quelle masse d'hydroxyde de sodium solide a servi pour préparer un litre de solution S_1 ?

2°) Pour préparer la solution diluée d'acide chlorhydrique S_2 , on utilise une solution commerciale S_3 de densité $d = 1,19$ et de fraction massique $w_{\text{HCl}} = 0,37$ en chlorure d'hydrogène. Rappeler ce qu'est une fraction massique.

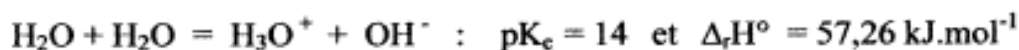
Déterminer le volume de la solution commerciale S_3 que l'on doit prélever pour préparer un litre de solution diluée S_2 .

3°) On ajoute à un litre de la solution chlorhydrique S_2 préparée 6 gouttes de la solution d'hydroxyde S_1 . Sachant que le compte-gouttes de la burette délivre 1 cm^3 pour 20 gouttes, que vaut la concentration en ions hydronium dans la solution d'acide, après cet ajout ?

4°) Combien versera-t-on de gouttes pour obtenir une solution neutre au sens du pH ?

Remarque ?

Solutions aqueuses :



$$K_s[\text{CaCO}_3] = 10^{-8,4}$$

$$K_s[\text{Pb}(\text{OH})_2] = 10^{-16} \quad ; \quad K_s[\text{PbSO}_4] = 2 \cdot 10^{-8} \quad ; \quad K_s[\text{PbCl}_2] = 10^{-4,8}$$

$$E^\circ(\text{H}^+ / \text{H}_2(\text{g})) = 0,00 \text{ V} \quad ; \quad E^\circ(\text{O}_2(\text{g}) / \text{H}_2\text{O}(\text{l})) = 1,23 \text{ V} \quad ; \quad \frac{RT}{F} \ln X = 0,06 \log X$$

Masses molaires des éléments en g.mol^{-1}

H : 1 O : 16 N : 14

Na : 23 Cl : 35,5 Pb : 207

Rayons ioniques

Na^+ : 98 pm

Cl^- : 181 pm

1 pm = 10^{-12} m

Constantes physico-chimiques

Na = $6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

R = $8,314 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$