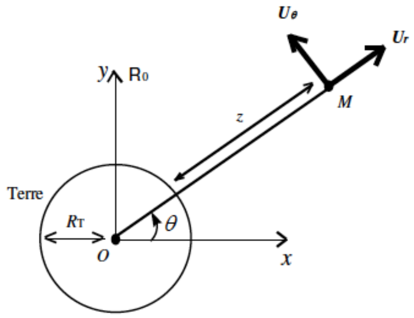
Problème 1 : Satellite (Extrait concours Agro-TB, 2005)

1. MECANIQUE : MOUVEMENT D'UN SATELLITE D'OBSERVATION TERRESTRE

On étudie dans cette partie les caractéristiques de la trajectoire autour de la Terre du satellite ADEOS II. Ce satellite est utilisé pour observer la terre (son atmosphère, ses océans…) et fournir ainsi des données importantes permettant d'étudier les changements climatiques.

L'étude du mouvement se fera dans le référentiel géocentrique R_0, supposé galiléen. Le satellite, de masse m, est assimilé à un point matériel M, décrivant une trajectoire plane, circulaire, de rayon $r = OM$, de centre O, centre de la Terre.

On repère la position du satellite dans le plan de sa trajectoire par ses coordonnées polaires : $r = OM$, $\theta = (\boldsymbol{Ox}, \boldsymbol{OM})$. On utilisera la base polaire $(\boldsymbol{U_r}, \boldsymbol{U_\theta})$ définie à la figure 1.



- figure 1 -

L'altitude z du satellite est définie par $r = R_T + z$ où R_T est le rayon de la Terre.

Données numériques :

Constante de gravitation universelle :	$G = 6{,}67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
Masse de la terre :	$M_T = 6{,}00.10^{24}$ kg
Rayon de la terre :	$R_T = 6\,400$ km
Masse du satellite :	$m = 3{,}68.10^3$ kg
Altitude de la trajectoire du satellite :	$z = 800$ km

1.1. *Vitesse du satellite*

1.1.1. Exprimer la force $\boldsymbol{F}$ exercée par la terre sur le satellite en fonction de G, m, M_T, R_T, z et d'un vecteur de base ($\boldsymbol{U_r}$ ou $\boldsymbol{U_\theta}$).

1.1.2. À partir de la relation fondamentale de la dynamique, exprimer la norme V de la vitesse du satellite sur son orbite circulaire en fonction de G, M_T, R_T et z.

Calculer numériquement V.

1.2. *Période de révolution*

Établir l'expression de la période de révolution T du satellite en fonction de G, M_T, R_T et z. Quel nom donne-t-on à cette relation ? Calculer numériquement T.

1.3. *Étude énergétique*

1.3.1. Établir l'expression de l'énergie potentielle de gravitation E_P du satellite en fonction de G, M_T, R_T, m et z, en prenant conventionnellement l'énergie potentielle nulle à l'infini.

1.3.2. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E du satellite sur sa trajectoire circulaire en fonction de G, M_T, R_T, m et z.

1.3.3. Exprimer puis calculer l'énergie E_L qu'il a fallu fournir pour amener le satellite depuis le sol (au niveau de l'équateur) jusqu'à l'altitude z avec la vitesse V.

On rappelle la vitesse angulaire Ω_T de rotation de la Terre sur elle même : $\Omega_T = 7{,}72.10^{-5}$ rad.s^{-1}.

1.3.4. Au bout d'un certain temps, le satellite aura perdu une partie de l'énergie mécanique E calculée à la question **1.3.2.**, et son énergie mécanique vaudra alors $E' < E$.

En considérant que cette énergie perdue représente, en valeur absolue, 5 % de la valeur absolue de E, et en supposant que sa trajectoire soit encore circulaire, calculer la nouvelle altitude z' et la vitesse V' du satellite. Conclure.

Problème 2 : Mécanique en référentiel non galiléen (Extrait concours CCP-TSI, 2007)

Au cours de ce problème, nous envisagerons deux situations différentes d'un petit anneau M de masse m, considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottements le long d'une tige OA, de longueur l, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical (Δ) passant par son extrémité O.

Le référentiel lié au laboratoire sera considéré comme galiléen.

L'espace est rapporté au repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au laboratoire et tel que :

$\vec{e}_x$: vecteur unitaire de l'axe horizontal Ox.

$\vec{e}_y$: vecteur unitaire de l'axe horizontal Oy.

$\vec{e}_z$: vecteur unitaire de l'axe vertical Oz.

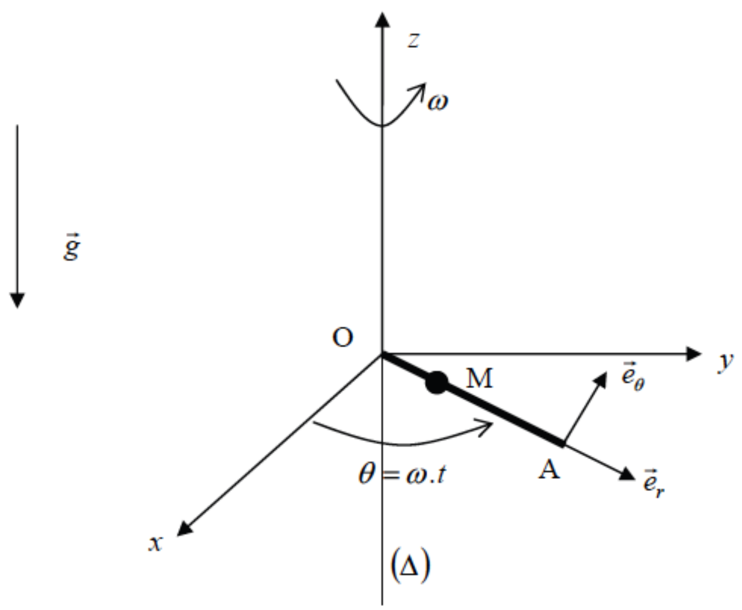
On pourra lors des calculs vectoriels utiliser les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_T$ définis de la manière suivante :

$\vec{e}_r$: vecteur unitaire du plan (Oxy) dirigé suivant la projection de la tige dans le plan (Oxy) et orienté dans le sens $\overrightarrow{OA}$ de la tige.

$\vec{e}_\theta$: vecteur unitaire du plan (Oxy), perpendiculaire au vecteur $\vec{e}_r$ et tel que le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ soit un repère direct.

$\vec{e}_T$: vecteur unitaire de la tige et orienté de O vers A.

La tige OA se trouve dans le plan horizontal (xOy) et tourne autour de l'axe vertical (Δ) à la vitesse angulaire constante ω. L'axe (Δ) est ainsi confondu avec l'axe Oz.
Dans ce cas on a donc : $\vec{e}_r = \vec{e}_T$.
L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < l$).
On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M ($r = OM$).



L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

1/ L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige.
Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces.
Ecrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de m, g, ω, r et des vecteurs unitaires définis précédemment.
Quels sont les vecteurs unitaires qui portent les composantes de la réaction de la tige ?

2/ En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

3/ Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, ω et t.

4/ En déduire l'expression du temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0, l et ω.

5/ Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}_f$, calculée dans le référentiel lié à la tige, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de ω, r_0, l et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.

En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}'_f$, calculée dans le référentiel lié au laboratoire, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de ω, r_0, l et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.

<u>Exercice: Sonde et astéroïde</u>

Une sonde spatiale de 1500 kg s'est posée sur un astéroïde pour en prélever un échantillon avant de retourner sur Terre. Elle allume son moteur pour repartir en direction de la Terre. Quand elle se trouve à 200 km du centre de l'astéroïde, sa vitesse est de $5{,}0\ \text{m.s}^{-1}$ et la sonde éteint ses moteurs. A 500 km du centre de l'astéroïde, sa vitesse n'est plus que de $4{,}1\ \text{m.s}^{-1}$.
Quelle est la masse de l'astéroïde ?
<u>Donnée :</u> $G = 6{,}7 \times 10^{-11}\ \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$