Electrocinétique

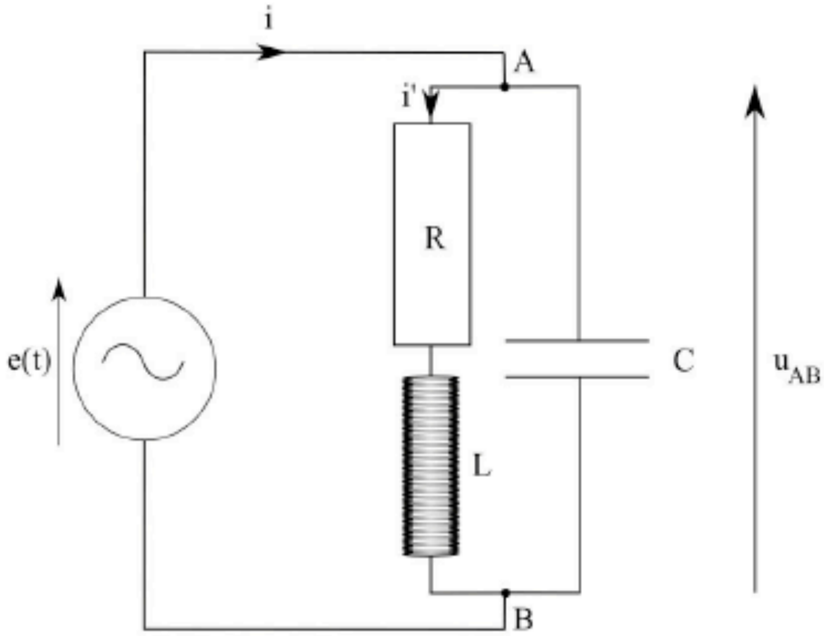
Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :

« La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. »

Problème : Circuit anti-résonant, extrait « Petites Mines » 2010

On s'intéresse dans cette partie au circuit (C_1) suivant, alimenté par une source de tension alternative de f.e.m. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. La bobine idéale a une inductance L ($L = 0{,}10$ H), le conducteur ohmique une résistance R ($R = 10\ \Omega$) et le condensateur une capacité C ($C = 1{,}0$ nF).

On notera j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.



B.1. Questions préliminaires

B.1.1. Qu'appelle-t-on résonance en intensité dans un circuit ? Par analogie que peut-on appeler antirésonance en intensité ?

B.1.2. Dans le cas du circuit R.L.C série quelle est l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle constitué par l'association de ces trois éléments ? Quelle est l'expression du module $Z(\omega)$ de cette impédance complexe ?

B.1.3. À quelle condition sur $Z(\omega)$ a-t-on résonance en intensité dans le circuit série ? Pour quelle valeur ω_0 de la pulsation ce phénomène se produit-il ? Que peut-on dire du déphasage de l'intensité dans le circuit par rapport à la tension aux bornes du conducteur ohmique à la résonance ?

B.2. Étude du circuit anti-résonant

B.2.1. Calculer l'impédance complexe du dipôle AB.

B.2.2. En déduire que le module au carré de l'impédance du dipôle AB s'écrit :

$$Z^2(\omega) = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}$$

B.2.3. Une dérivation non demandée montre que $Z(\omega)$ passe par un extremum pour une pulsation ω_0' qui vérifie : $\omega_0'^2 = \omega_0^2\left[\sqrt{1 + 2R^2C/L} - R^2C/L\right]$.

i. Vérifier que : $\dfrac{R^2C}{L} << 1$.

ii. Montrer que $\omega_0' \approx \omega_0(1 - f(R, L, C))$ où ω_0 représente la pulsation de résonance du circuit R, L, C série établie à la question **B.1.3.** et $f(R, L, C)$ une fonction de *R*, *L* et *C* dont on précisera l'expression.

iii. Calculer numériquement $f(R, L, C)$ pour le circuit étudié. Que peut-on alors dire de ω_0' et ω_0 ?

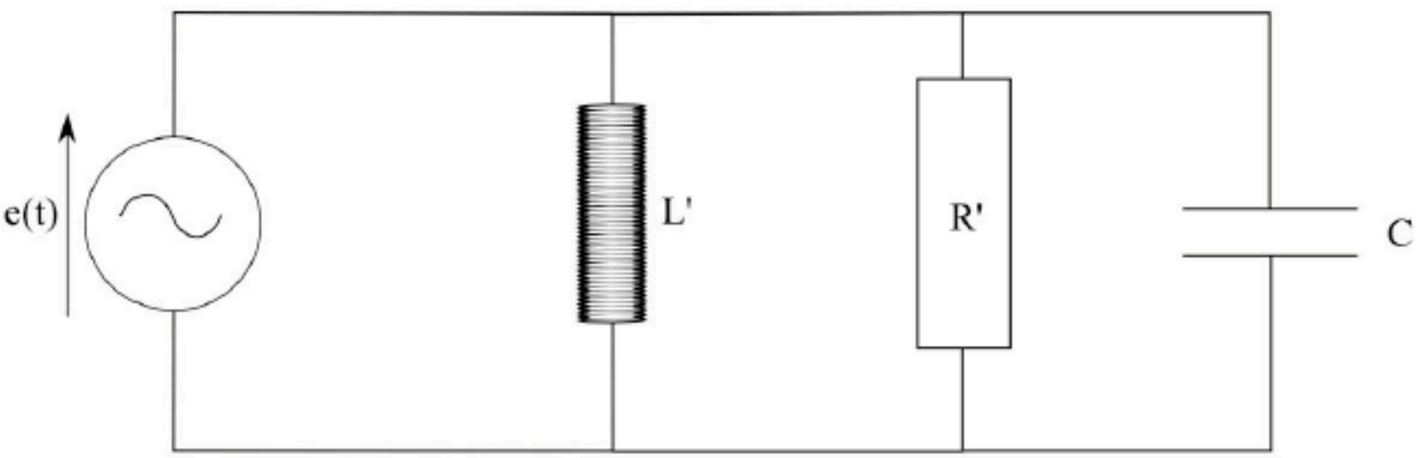
Dans toute la suite on pourra utiliser l'approximation $\omega_0' \approx \omega_0$.

B.2.4. Donner les limites de $Z(\omega)$ en 0 et en l'infini. Donner l'allure des variations de cette fonction en précisant la valeur de $Z(\omega_0') = Z_m$. Justifier qu'on parle d' « antirésonance » dans ce cas.

B.2.5. Établir une relation entre $\underline{i}$, $\underline{i}'$, *R*, *L* ,*C* et ω.

B.2.6. Notons respectivement *I* et *I'* les amplitudes de *i* et *i'*. Montrer qu'à l'antirésonance le courant *I'* dans la branche constituée par la bobine et le conducteur ohmique est beaucoup plus grand que celui *I* dans le circuit général.

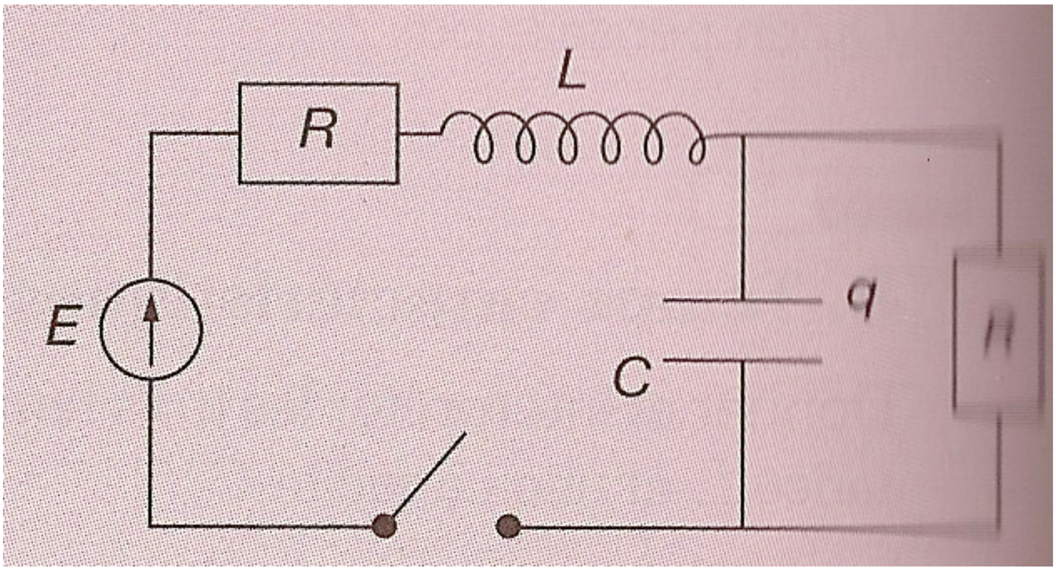
Soit (C_2) le circuit suivant, constitué de l'association parallèle d'une bobine idéale d'inductance *L'*, d'un conducteur ohmique de résistance *R'* et d'un condensateur de capacité *C,* identique à celui intervenant dans le circuit (C_1).



B.2.7. Montrer qu'au voisinage de l'antirésonance les circuits (C_1) et (C_2) peuvent être considérés comme équivalents et calculer alors *L'* et *R'* pour que cette équivalence soit réalisée. On utilisera avantageusement les admittances pour traiter cette question.

Exercice : Régime transitoire d'ordre 2

On considère le circuit ci-dessous. A $t = 0$, le condensateur est déchargé et on ferme l'interrupteur. On pose $\tau = RC = L/R$.



a) Déterminer l'équation différentielle qui gouverne l'évolution de la charge $q(t)$ de l'armature supérieure du condensateur. On fera apparaître τ.

b) En déduire l'expression de $q(t)$ en fonction C, E et τ puis tracer son allure.

c) Retrouver par un argument simple la charge finale du condensateur.

d) Estimer la durée du régime transitoire.