Problème 1 : Oscillations mécaniques (Extrait du concours commun polytechniques TSI)

Premier problème : Oscillations mécaniques

Nous nous proposons, dans ce problème, d'étudier quelques exemples d'oscillateurs mécaniques.

Pour chacune des parties, l'étude sera menée dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen.
Dans l'ensemble du problème, $\vec{g}$ désigne le vecteur accélération de la pesanteur. On notera g la norme du vecteur $\vec{g}$.

Il est rappelé que lorsqu'un corps est immergé, partiellement ou totalement, dans un fluide de masse volumique ρ_l, ce corps est soumis, en plus de son poids, à une force $\vec{F}_a$ appelée poussée d'Archimède et telle que $\vec{F}_a = -\rho_l V_i \vec{g}$ où V_i désigne le volume du corps immergé dans le fluide.

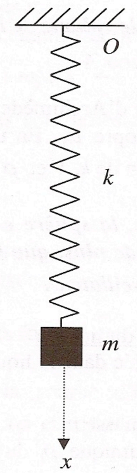
On négligera la poussée d'Archimède dans l'air.

Données trigonométriques :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Première partie : Oscillateur harmonique non amorti

Considérons le système représenté ci-dessous : une masse m est suspendue à un ressort vertical de masse négligeable et de raideur k. L'extrémité supérieure du ressort est fixe et attachée au point O. Soit l'axe (Ox), vertical et orienté vers le bas. La position de l'extrémité libre du ressort est repérée par son abscisse x.
Soit x_0 la longueur à vide du ressort et $x_{éq}$ sa longueur lorsque la masse m est accrochée au ressort et est à l'équilibre.



1/ Equation différentielle du mouvement

1.1/ Faire le bilan des forces appliquées à la masse m. Appliquer la deuxième loi de Newton et déterminer l'équation différentielle (1) vérifiée par x. Que devient cette équation lorsque la masse m est à l'équilibre ? On appellera (2) l'équation obtenue dans ce cas.
Déduire de l'équation (2) l'expression de la longueur $x_{éq}$ du ressort à l'équilibre en fonction de x_0, g, m et k.

1.2/ Déterminer en combinant les équations (1) et (2), l'équation différentielle (3) vérifiée par x et liant x, $x_{éq}$, m et k. En déduire la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 de l'oscillateur ainsi obtenu.

1.3/ A l'instant $t = 0$, la masse m est dans une position telle que la longueur du ressort est égale à $x_{éq}$. On communique alors à la masse m une vitesse v_0 verticale. Déterminer dans ce cas la solution $x(t)$ de l'équation différentielle (3).

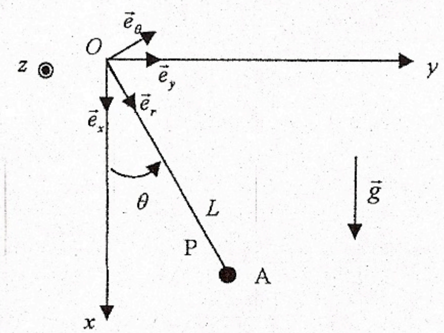
Problème 2 : Oscillations d'un pendule simple, aspect énergétique (Extrait du concours commun 2005 des écoles des Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes)

Première partie : Oscillations d'un pendule simple

Un objet ponctuel A de masse m est suspendu à l'extrémité P d'un fil OP de masse négligeable et de longueur L. Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical *(Oxy)*, autour de l'axe horizontal *(Oz)*.
La position de l'objet A est repérée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale.
L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation seront négligés dans toutes les questions.
Les frottements de l'air seront négligés dans toutes les questions hormis dans les question 2.5 et 3.5 où l'on envisagera un amortissement par frottement fluide.

L'ensemble ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g.\vec{e}_x$.



Nous nous proposons, dans cette question, de retrouver l'équation différentielle du mouvement du pendule par une méthode énergétique.

L'étude sera faite dans le cas général de mouvements d'amplitude quelconque.

3.1/ Déterminer, pour une position du pendule repérée par un angle θ quelconque, l'expression de l'énergie cinétique E_c de l'objet A (pour $t \geq 0$) en fonction de m, L et $\frac{d\theta}{dt}$.

3.2/ Déterminer de même, pour une position du pendule repérée par un angle θ quelconque, l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_p de l'objet A (pour $t \geq 0$) en fonction de m, L, θ et g accélération de la pesanteur. On prendra la référence de l'énergie potentielle de pesanteur dans la position repérée par l'angle $\theta = 90°$.

3.3/ Sachant que dans cette question tous les frottements sont négligés, retrouver par des considérations énergétiques l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

3.4/ Dans le cas des mouvements de faible amplitude, l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie cinétique de l'objet A sont des fonctions périodiques du temps. Déterminer la période T'_0 de ces fonctions en fonction de T_0 (période définie dans la question 2.1). Justifier le résultat.

3.5/ Amortissement par frottement fluide
Nous nous plaçons à nouveau dans le cas où l'objet A est soumis à un frottement fluide proportionnel à sa vitesse. Soit h le coefficient de proportionnalité entre la force de frottement $\vec{f}$ et la vitesse $\vec{v}$ de l'objet A. La force de frottement s'écrit sous la forme $\vec{f} = -h.\vec{v}$.

Compte tenu des expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur de l'objet A déterminées précédemment, retrouver par des considérations énergétiques l'équation différentielle du mouvement de la question 2.5 dans le cas où l'on prend en compte la présence d'un frottement fluide.

Les frottements sont supposés suffisamment faibles pour que le régime d'oscillations de l'objet A soit pseudo-périodique.

Déterminer alors, **dans le cas des petites oscillations**, la solution $\theta(t)$ de l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ lorsque l'objet A est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_0.
Donner, dans ce cas, l'allure de la représentation graphique de $\theta(t)$ en fonction du temps.

Deuxième partie : Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide

La masse m du système de la partie précédente est une sphère homogène de masse volumique ρ et de rayon R faible.
Lorsque cette sphère est animée d'une vitesse $\vec{v}$ et plongée dans un liquide de coefficient de viscosité η, elle est soumise, de la part du fluide, en plus de la poussée d'Archimède, à une force de frottement $\vec{f}$ donnée par la loi de Stokes : $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$.
On négligera les interactions éventuelles entre le ressort et le liquide.

Pour simplifier les calculs, on notera V le volume de la sphère et ρ V sa masse.

2/ Période de l'oscillateur non amorti
En l'absence de frottement et de poussée d'Archimède (**dans le vide ou dans l'air**), les oscillations libres de la sphère ont une pulsation propre ω_1. En utilisant les résultats de la partie précédente, déterminer l'expression de ω_1 en fonction de k, V et ρ.

Dans la suite de cette deuxième partie, la sphère est totalement immergée dans un liquide de masse volumique ρ_l. On considèrera, de plus, que la sphère est entièrement immergée dans le liquide quelle que soit la position de l'oscillateur.

3/ Détermination de la masse volumique du liquide
Lorsque la sphère est totalement immergée dans le liquide et est à l'équilibre, la longueur du ressort est égale à $x'_{éq}$.
Faire le bilan des forces appliquées à la masse m.
Déterminer l'expression de la masse volumique ρ_l du liquide en fonction de ρ, $x'_{éq}$, V, g, x_0 et k.

4/ Oscillations pseudopériodiques de la sphère immergée dans le liquide
4.1/ En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la longueur x du ressort à un instant quelconque t au cours du mouvement.
En utilisant l'expression de la masse volumique ρ_l du liquide déterminée à la question précédente, déterminer l'équation différentielle vérifiée par x en utilisant les grandeurs x, $x'_{éq}$, ρ, V, k, R et η.

4.2/ A quelle condition portant sur k, constante de raideur du ressort, le mouvement de la sphère est-il pseudopériodique ? On exprimera la condition sous la forme $k > k_0$ où k_0 est une constante que l'on exprimera en fonction de η, R, V et ρ.
Déterminer dans ce cas la pseudopulsation ω_2 des oscillations en fonction de k_0, k, ρ et V.

5/ Détermination du coefficient de viscosité du liquide
On considère dans cette question que la condition sur k pour avoir des oscillations pseudopériodiques est satisfaite. En utilisant les expressions de ω_1 et ω_2 déterminées précédemment, donner l'expression du coefficient de viscosité η du liquide en fonction de R, ρ, V, ω_1 et ω_2.