

A1.3. Montrer que, quel que soit $t \geq 0$, le moment cinétique J du satellite est constant, égal à une valeur J_0 . Expliciter J_0 .

A1.4. Justifier le fait que la trajectoire suivie par le satellite, pour $t \sim 0$, est entièrement contenue dans un plan fixe P , que l'on précisera.

III - Etude du mouvement plan. Aspects dynamiques et énergie

On reprend les hypothèses de la section I ci-dessus, en se plaçant dans le plan P de la trajectoire. Ce plan est rapporté aux coordonnées polaires (r, θ) de centre O et de base locale (u_r, u_θ) . C - u_r et u_θ sont respectivement le vecteur unitaire radial et le vecteur unitaire orthoradial -.

A2.1. Montrer que le principe fondamental de la dynamique, appliqué au satellite, conduit à l'équation différentielle :

$$r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

Que représente le terme $2r\dot{r}\dot{\theta}$?

A2.2. Dédurre de l'équation différentielle précédente que le mouvement du satellite vérifie une relation de la forme : $r^n \dot{\theta} = C = \text{cste}$.

Déterminer l'exposant n , et relier la constante C au moment cinétique, J , du satellite par rapport au centre de la Terre et à sa masse m .

A2.3. Exprimer l'aire, dA , balayée par le rayon-vecteur r durant l'intervalle de temps dt .

Montrer que l'aire ΔA balayée par le rayon-vecteur durant un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ est proportionnelle à Δt , le facteur de proportionnalité α étant le même quel que soit $t_1 \geq 0$ (seconde loi de Kepler). Pour cela, on identifiera le facteur α .

On note respectivement $U(r)$ et $K(r)$ l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du satellite dans la position courante r , et respectivement U_0 et K_0 , ces mêmes énergies à l'instant initial.

A2.4. En adoptant la convention : $U = 0$ à l'infini, justifier physiquement le fait que l'énergie potentielle de gravitation $U(r)$ est négative quelle que soit la distance r , finie.

A2.5. Partant de la position r , le satellite effectue un déplacement élémentaire dr le long de sa trajectoire.

Relier les variations $dU(r)$ et $dK(r)$ de l'énergie potentielle et cinétique observées au cours de ce déplacement, au champ de force $F(r)$.

De quelle propriété jouit la somme : $E(r) = U(r) + K(r)$?

A2.6. A quelle condition liant U_0 et K_0 , le satellite reste-t-il en orbite autour de la Terre (état lié) ? Quelle est alors la nature de la trajectoire suivie par le satellite ?

- On donnera ces deux résultats sans les démontrer -.

III - Satellite géostationnaire

La Terre tourne sur elle-même, autour de sa ligne des pôles, à la vitesse angulaire Ω . On ne considère pas son mouvement de révolution autour du Soleil.

Le satellite évolue maintenant de façon géostationnaire¹, c'est-à-dire qu'il tourne de façon synchrone avec la Terre sur une orbite circulaire de rayon a_1 , située dans le plan équatorial.

A3.1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au satellite, déterminer l'expression du rayon a_1 , de l'orbite géostationnaire, en fonction de G , M et Ω .

A3.2. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation $U(r)$ du satellite, lorsqu'il se situe à une distance r , quelconque, du centre de la Terre.
On exprimera $U(r)$ en fonction de G , M , m et r , en retenant la condition : $U = 0$ à l'infini.

A3.3. Exprimer l'énergie mécanique totale E_T du satellite sur son orbite géostationnaire, en fonction de G , M , m et a_1 .

A3.4. Le satellite a été lancé à partir d'une base terrestre située sur l'équateur (Kourou [Guyane]). Déterminer l'énergie minimale, W_L , qu'il a fallu dépenser pour le placer sur orbite géostationnaire.
- On ne tient pas compte ici des frottements dans l'atmosphère, pas plus que de l'énergie dépensée pour propulser la fusée porteuse, hors satellite -.

A3.5. Exprimer la différence, ΔW_L , entre l'énergie minimale de lancement sur orbite géostationnaire à partir d'une base équatoriale et à partir d'une base située à la latitude géographique $\lambda \neq 0$. Est-il, sur le plan énergétique, préférable d'effectuer les lancements depuis la base de Kourou ($\lambda = 0$) ou du Cap Canaveral [Floride] ($\lambda = 25^\circ N$) ?

¹ « géostationnaire » signifie « immobile par rapport à un observateur terrestre ».