Problème 1 : Mécanique en référentiel non galiléen (Extrait concours CCP-TSI, 2007)

Au cours de ce problème, nous envisagerons deux situations différentes d'un petit anneau M de masse m, considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottements le long d'une tige OA, de longueur l, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical (Δ) passant par son extrémité O.

Le référentiel lié au laboratoire sera considéré comme galiléen.

L'espace est rapporté au repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au laboratoire et tel que :

$\vec{e}_x$: vecteur unitaire de l'axe horizontal Ox.

$\vec{e}_y$: vecteur unitaire de l'axe horizontal Oy.

$\vec{e}_z$: vecteur unitaire de l'axe vertical Oz.

On pourra lors des calculs vectoriels utiliser les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_T$ définis de la manière suivante :

$\vec{e}_r$: vecteur unitaire du plan (Oxy) dirigé suivant la projection de la tige dans le plan (Oxy) et orienté dans le sens $\overrightarrow{OA}$ de la tige.

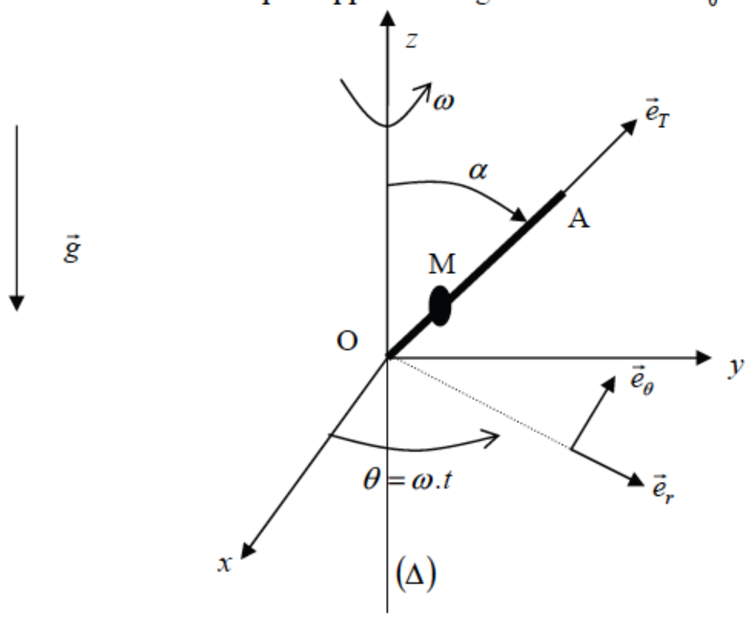
$\vec{e}_\theta$: vecteur unitaire du plan (Oxy), perpendiculaire au vecteur $\vec{e}_r$ et tel que le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ soit un repère direct.

$\vec{e}_T$: vecteur unitaire de la tige et orienté de O vers A.

La tige OA fait maintenant un angle α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$ rad) avec l'axe (Δ). La tige tourne autour de (Δ) avec la vitesse angulaire constante ω.

On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M ($r = OM$).

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < l$).



L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

6/ L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige.
Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces.
Ecrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de m, g, ω, r, α et des vecteurs unitaires définis précédemment.

7/ En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

8/ Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, α, g, ω et t.

9/ Déterminer la position d'équilibre $r_{éq}$ de l'anneau sur la tige. Exprimer $r_{éq}$ en fonction de ω, α et g.
Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre de l'anneau sur la tige OA que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur seuil ω_0 que l'on déterminera. Exprimer ω_0 en fonction de α, g et l.

10/ On se place dans le cas où $\omega > \omega_0$, l'anneau étant dans sa position d'équilibre. On écarte légèrement l'anneau de cette position d'équilibre.
Déterminer, en la justifiant, l'orientation de la résultante des forces appliquées à l'anneau ? En déduire si l'équilibre est stable ou instable.

Problème 2 : Atmosphère et ballon (Extrait concours Centrale-Supélec-TSI, 2008)

Sonder l'atmosphère

L'atmosphère entoure toute la Terre et permet à toutes les espèces vivantes terriennes de respirer pour vivre. Les phénomènes physiques intervenant dans l'atmosphère sont nombreux et caractérisent en fait différentes couches en fonction de l'altitude : de la troposphère au niveau du sol jusqu'à l'ionosphère couche d'atmosphère la plus haute avant l'Espace.

On se propose dans ce sujet d'étudier la façon dont les météorologistes sondent les basses couches de l'atmosphère (troposphère et basse stratosphère) pour tenter de comprendre et de modéliser les phénomènes météorologiques, en vue notamment de répondre à la difficile question : « Quel temps fera-t-il demain ? ».

Données numériques :

Rayon de la Terre	$R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km
Accélération de la pesanteur au niveau du sol	$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Enthalpie massique de vaporisation de l'eau (supposée indépendante de la température)	$l_v = 2\,100 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
Masse molaire de l'air	$M_{air} = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'hélium	$M_{He} = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Capacités thermiques molaires pour un gaz parfait diatomique	$C_{vm} = \frac{5R}{2}$ et $C_{pm} = \frac{7R}{2}$

On rappelle qu'à l'ordre 1 en ε : $(1+\varepsilon)^a = 1 + a\varepsilon$ et $e^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon$.

Partie I - Modéliser l'atmosphère

Toute prévision météorologique est basée sur un modèle fiable de l'atmosphère, rendant compte en particulier de la pression, de la température et de l'hygrométrie (humidité de l'air) en différents points de l'espace. Des mesures expérimentales de ces grandeurs en fonction de l'altitude sont ainsi effectuées régulièrement à l'aide de ballons-sonde pour permettre d'affiner les modèles informatiques existants et de prévoir les éventuelles formations nuageuses. Dans cette partie, le champ de pesanteur est uniforme, égal à sa valeur au niveau du sol. L'air sera toujours considéré localement comme un gaz parfait.

I.A - Modèle simple de l'atmosphère isotherme

On considère dans un premier temps le cas d'une atmosphère isotherme au repos, dans laquelle la température est uniforme et vaut $T_0 = 273\ \mathrm{K}$. La pression au niveau du sol vaut $P_0 = 1,0\ \mathrm{bar} = 1,0 \cdot 10^5 \mathrm{Pa}$. On appelle $P(z)$ la pression qui règne à l'altitude z.

I.A.1) Faire un bilan des forces s'exerçant sur une tranche de fluide de base S, comprise entre les altitudes z et $z+dz$ (figure 1). En déduire l'équation différentielle vérifiée par $P(z)$.

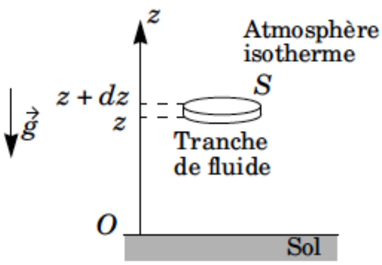


Figure 1 : tranche de fluide dans le modèle de l'atmosphère isotherme

I.A.2) Déterminer l'expression de la pression $P(z)$ qui règne à l'altitude z. Le tracé de $P(z)$ est reporté sur la figure 3 ci-après (courbe en pointillés).

I.A.3) Déduire de ce qui précède l'ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère isotherme dans le cadre de ce modèle. Faire l'application numérique. Montrer que l'on peut retrouver ces résultats graphiquement.

I.B - Profil de température et de pression dans l'atmosphère réelle

Les données transmises par un ballon-sonde au cours de la traversée de la troposphère et de la basse stratosphère permettent de tracer les profils réels de température et de pression régnant à la verticale d'une station météo. Les résultats expérimentaux sont rassemblés sur la figure 2 ci-après (page suivante).

I.B.1) Quelle différence essentielle y-a-t-il entre la stratosphère et la troposphère ?

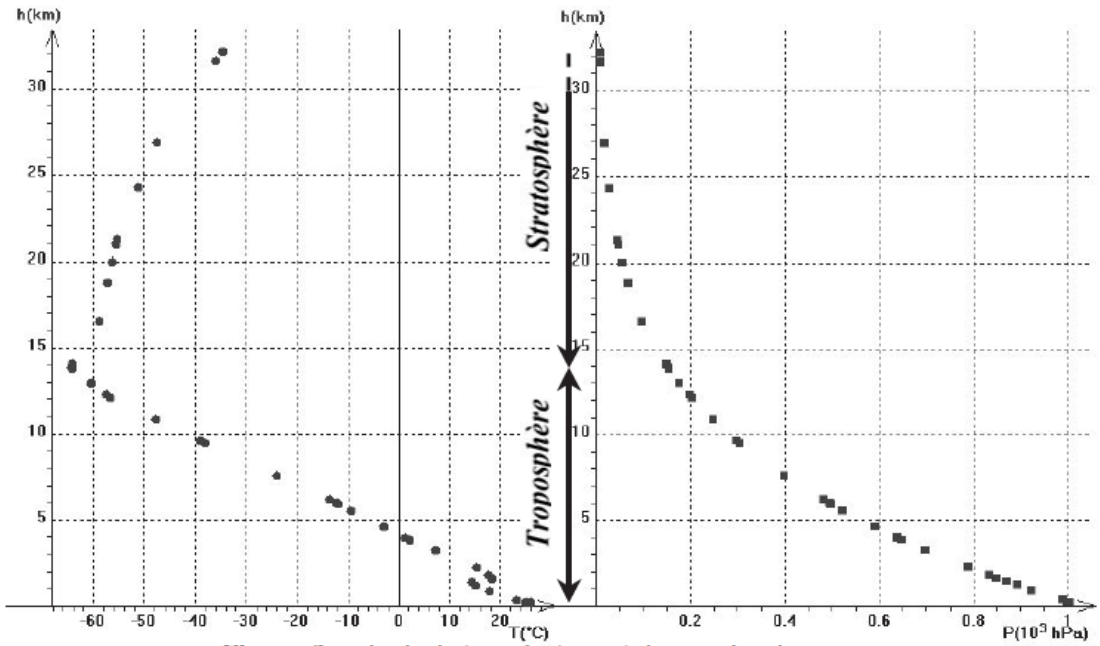


Figure 2 : relevés de température et de pression dans la troposphère et la stratosphère

I.B.2) Que pensez-vous du modèle vu en I.A.1 de l'atmosphère isotherme pour décrire la troposphère ? On comparera les profils réels de température et de pression avec les résultats du modèle (voir figure 3 courbe en pointillés).

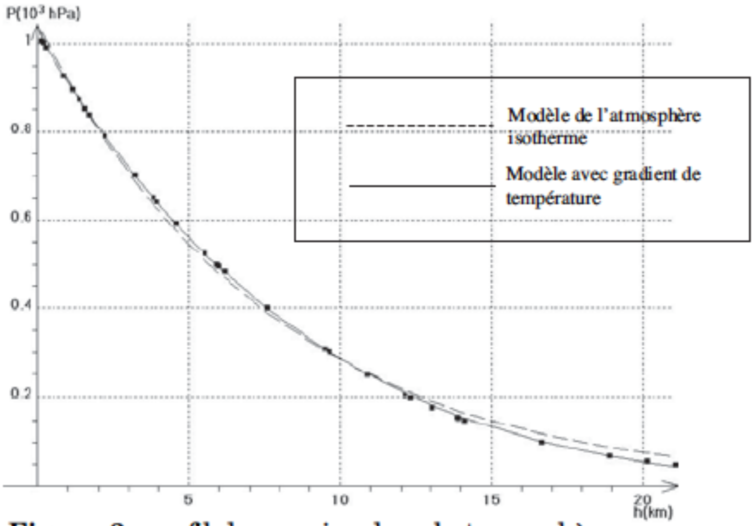


Figure 3 : profil de pression dans la troposphère ; en pointillés, modèle de l'atmosphère isotherme (voir question I.A) ; en trait plein, modèle avec gradient de température (voir question I.B.4).

On cherche à affiner le modèle précédent en considérant cette fois un profil de température de la forme : $T(z) = T_0 - az$ avec T_0 et a des paramètres constants.

I.B.3) Commenter le choix de ce profil de température et évaluer numériquement T_0 et a.

I.B.4) Montrer que le champ de pression dans la troposphère se met sous la forme : $P(z) = P_0(1 - bz)^{\alpha}$ où b et α sont des paramètres constants à déterminer. Comparer alors ce champ de pression avec celui obtenu en I.A.1 pour l'atmosphère isotherme lorsque l'on se place à faible altitude ($bz \ll 1$). Un logiciel informatique de traitement de données permet d'ajuster les valeurs de P_0, b et α pour que le modèle décrive correctement les points expérimentaux. On obtient ainsi :

$$P_0 = 1,03 \cdot 10^5 \text{ Pa} \qquad b = 1,95 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} \qquad \alpha = 5,91 .$$

La courbe correspondante est tracée en trait plein sur la figure 3.

I.B.5) Déduire de ces résultats une autre détermination de T_0 et a et comparer aux valeurs trouvées en I.B.3. Conclure quant à la validité de ce modèle pour décrire la troposphère.

I.B.6) En utilisant le même critère que celui vu en I.A.3) pour l'atmosphère isotherme, évaluer l'épaisseur de l'atmosphère dans ce nouveau modèle. Conclure.

Partie II - Étude d'un ballon-sonde

Le ballon-sonde est le moyen le plus simple et le plus économique d'envoyer une charge dans les différentes couches de l'atmosphère. Les ballons météorologiques, embarquant du matériel scientifique de mesure, explorent par exemple toute la troposphère et la basse stratosphère. On se propose ici d'étudier quelques variantes d'un ballon-sonde stratosphérique : ballon ouvert à l'hélium, ballon fermé à l'hélium et ballon ouvert à l'air humide (bulle d'orage). Dans toute cette partie, l'atmosphère est supposée isotherme, de température $T_0 = 273\ \mathrm{K}$, et le champ de pression est celui fourni par la figure 3 de la Partie I. La pression au niveau du sol vaut $P_0 = 1,0 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$.

Tous les gaz sont considérés comme parfaits.

On négligera la force de frottement de l'air.

II.A - Le ballon stratosphérique ouvert (B.S.O.)

On considère le ballon-sonde, représenté sur la figure 4 ci-contre, composé :

- d'une enveloppe supposée sphérique, de volume $V = 100\ \mathrm{m}^3$ (correspondant à un diamètre de l'ordre de $6\ \mathrm{m}$, ouverte sur l'extérieur par des manches d'évacuation situées à la base du ballon ;
- d'un parachute permettant de ralentir la descente du ballon à la fin de la mission ;
- d'un réflecteur radar rendant plus facile le suivi à distance du ballon ;
- d'une nacelle, contenant les appareils de mesure, le système de télécommunication et de positionnement GPS.

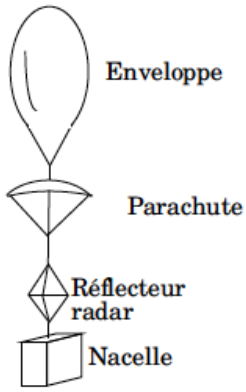


Figure 4 : Ballon-sonde

Dans ce type de ballon, l'enveloppe est indéformable et garde un volume V constant. Le ballon étant ouvert à sa base, la pression à l'intérieur du ballon est identique à tout moment à celle qui règne à l'extérieur. Au moment du lancement, le ballon est gonflé à l'hélium. On suppose que la température à l'intérieur du ballon reste constante, égale à la température extérieure T_0. La masse m de l'ensemble {enveloppe + parachute + réflecteur + nacelle} reste constante au cours du vol. Le volume du ballon est assimilé à celui de son enveloppe.

II.A.1) Le ballon-sonde étant prévu pour monter à quelques dizaines de kilomètres d'altitude, faut-il tenir compte de la variation du champ de pesanteur, assimilé ici au champ de gravitation terrestre, avec l'altitude ? Évaluer la variation relative maximale $\Delta g/g$ du champ de pesanteur entre le sol et l'altitude $z = 20\ \mathrm{km}$. Conclure.

II.A.2) Déterminer la masse m_{gaz} de gaz contenue dans l'enveloppe au décollage.

II.A.3) Effectuer un bilan des forces précis s'exerçant sur le ballon au moment du décollage. En déduire une condition sur m pour que le ballon décolle effectivement. On considère dans la suite $m = 10\ \mathrm{kg}$.

II.A.4) Expliquer ce qui se passe dans le ballon au cours de son ascension.

II.A.5) Le plafond est atteint lorsque le ballon est à son altitude maximale. À quelle condition le ballon plafonne-t-il ? Estimer alors l'altitude maximale atteinte par le ballon-sonde.

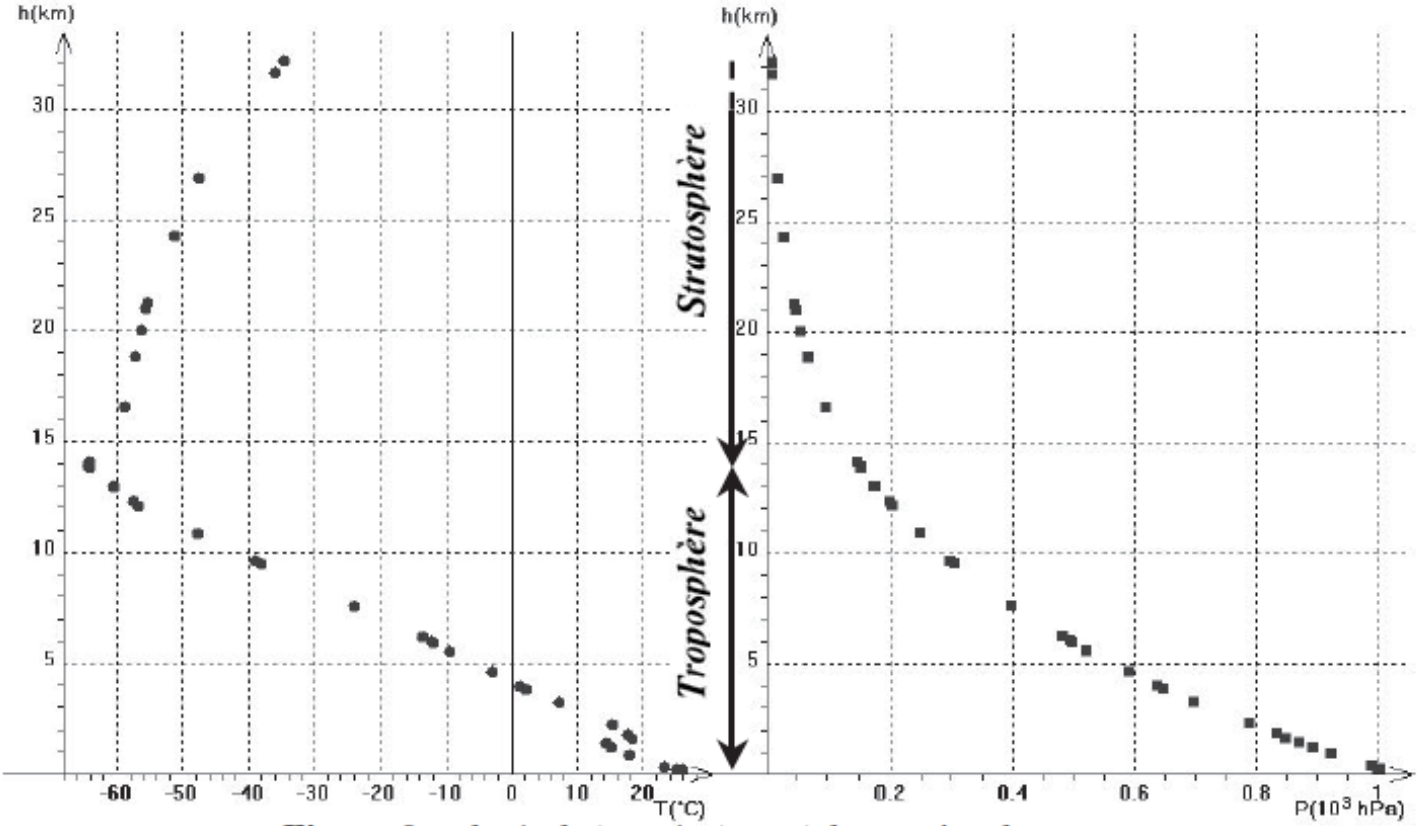


Figure 2 : relevés de température et de pression dans la troposphère et la stratosphère

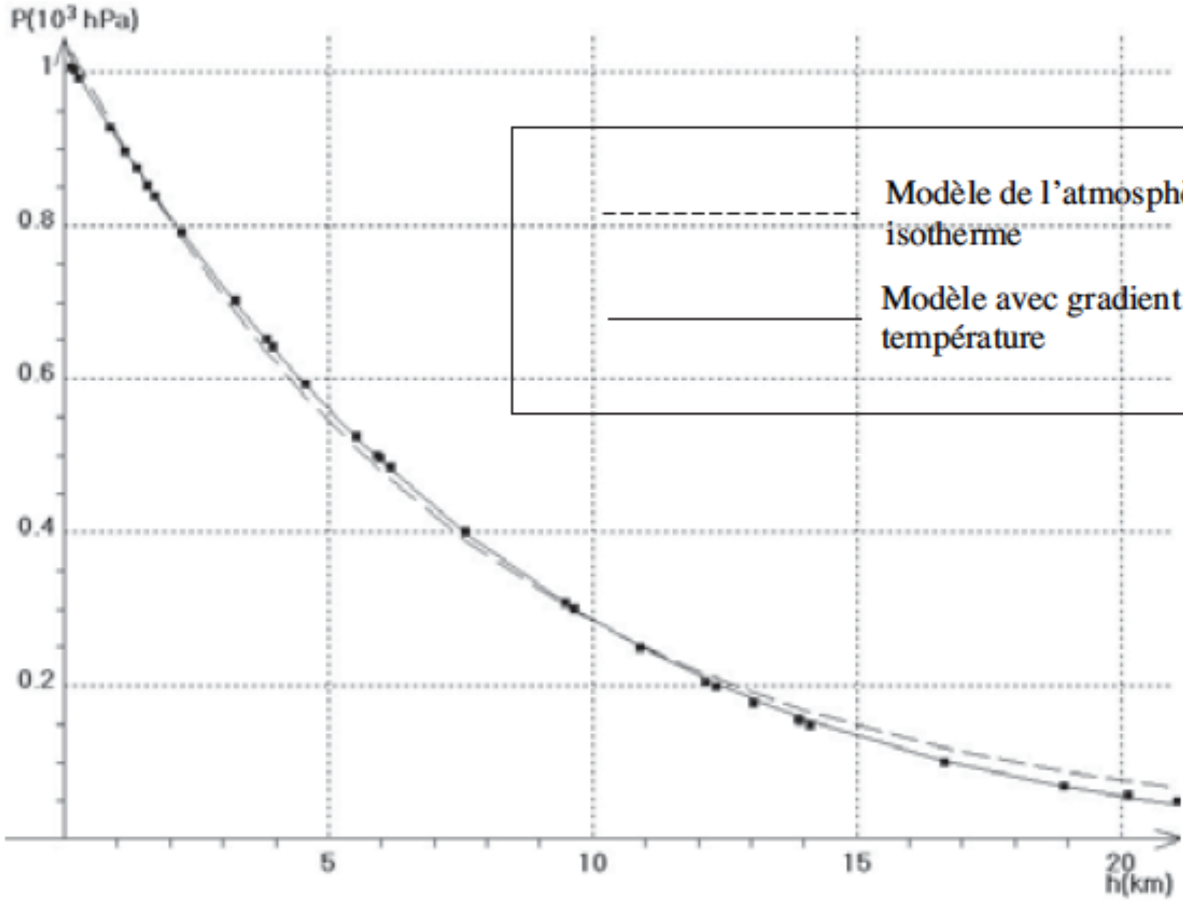


Figure 3 : profil de pression dans la troposphère ; en pointillés, modèle de l'atmosphère isotherme (voir question I.A) ; en trait plein, modèle avec gradient de température (voir question I.B.4).