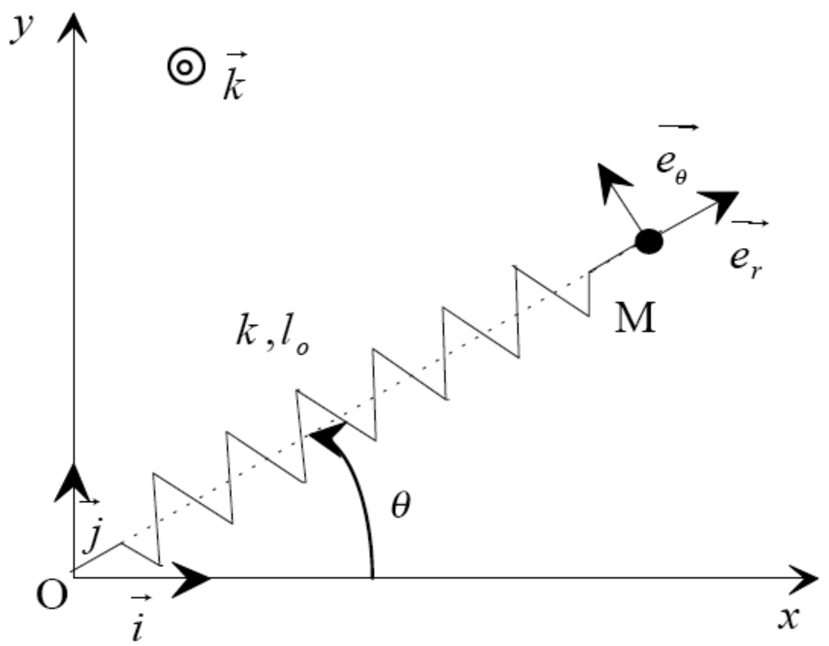
Problème n°1: Etude d'un ressort dans 2 différentiels (« Petites Mines » 2002)

A- Etude dans le référentiel R du laboratoire :



Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen et associé à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un palet M de masse m peut se mouvoir sans frottement dans le plan (O,x,y) horizontal (table à coussin d'air par exemple). Le champ de pesanteur est suivant la verticale Oz : $\vec{g} = -g\vec{k}$.

La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide l_o, de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en O. La position de M est repérée dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ou dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ par $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$.

A-1 Faire un bilan des forces. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique, $\vec{L_o}$ par rapport à O.

A-2

A t=0, la masse est lâchée, sans vitesse initiale d'une longueur $1{,}2l_0$: $\overrightarrow{OM}(t=0) = 1{,}2l_0\vec{i}$.

A-2-1 Calculer $\vec{L_o}$. Quelle est la nature de la trajectoire ?

A-2-2 Déterminer l'évolution temporelle de la longueur du ressort, $l(t) = OM(t)$. Préciser l'intervalle de variation de l, longueur du ressort.

A-3

On lance la particule d'un point $\overrightarrow{OM_o} = \overrightarrow{OM}(t=0) = l_1\vec{i}$, avec une vitesse initiale $\vec{v_o} = l_1\omega\vec{j}$, orthogonale à $\overrightarrow{OM_o}$. Dans la suite, on travaillera en coordonnées polaires dans le plan (O,x,y).

A-3-1 Préciser $\vec{L_o}$ en fonction r et $\frac{d\theta}{dt}$ puis en fonction des conditions initiales et des vecteurs de base. On notera L, le module de $\vec{L_o}$.

A-3-2 Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique.

Doit-on tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur pour étudier le mouvement ?

Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique, E_m.

Préciser l'expression de E_m :

- en fonction des conditions initiales,
- en fonction de r, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, m, k et l_o.

A-3-3 Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire : $E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{eff}(r)$.

Préciser l'expression de $E_{eff}(r)$. Tracer l'allure de $E_{eff}(r)$.

A-3-4 La masse peut-elle s'éloigner indéfiniment du pôle d'attraction ?

A-3-5 La vitesse de la particule peut-elle s'annuler au cours de son mouvement ?

A-3-6 La particule peut-elle passer par le centre d'attraction au cours de son mouvement ?

A-4

On cherche à déterminer une condition entre l_1 et ω pour avoir un mouvement circulaire.

A-4-1 Montrer que dans ce cas, le mouvement est uniforme.

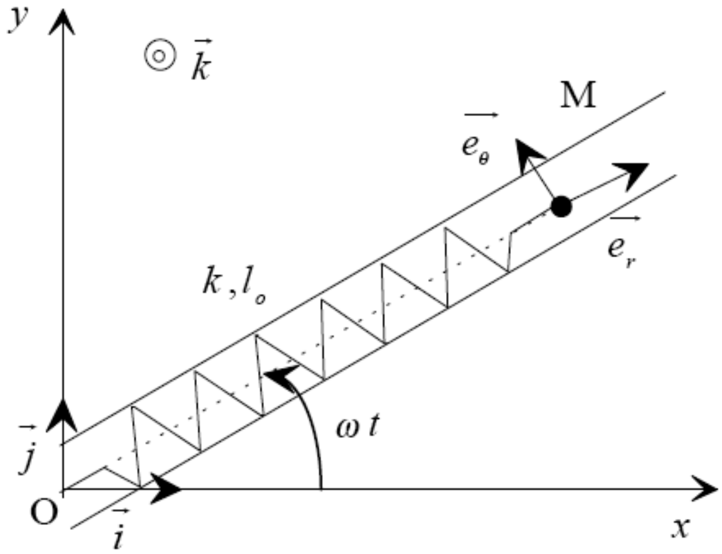
A-4-2 Déterminer l_1 en fonction de k, l_o et ω. Est-elle valable pour tout ω ?

B - Etude dans un référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe :

Le mouvement est étudié dans le référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe Oz fixe, de vecteur vitesse $\vec{\Omega} = \omega\vec{k}$, et associé au repère $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$.

On considère une particule M de masse m pouvant se mouvoir sans frottement le long de l'axe $(O, \vec{e_r})$. Le champ de pesanteur est toujours suivant la verticale Oz : $\vec{g} = -g\vec{k}$.

La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide l_o, de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en O. La position de M est repérée dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ par $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$.



B-1 Préciser les expressions vectorielles des forces d'inertie dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$.

B-2 Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle E_{pfie} que l'on précisera.

B-3 En est-il de même pour la force d'inertie de Coriolis ou complémentaire ?

B-4 Déterminer l'énergie potentielle totale. Tracer l'allure de $E_p(r)$. On distinguera les 3 cas possibles selon la valeur de ω.

B-5 Déterminer la longueur l_2 correspondant à la position d'équilibre dans le référentiel R'.

A quelle condition sur ω le résultat est-il possible ? Cet équilibre est-il stable ?

Quel est alors le mouvement dans le référentiel du laboratoire ?

B-6 Comparer l_2 à l_1 du paragraphe précédent. Conclusion.

Problème n°2: Troposphère (« Petites Mines » 2007)

B- Deuxième partie : Température et pression dans la troposphère.

Pour la troposphère, située entre les altitudes 0 et 11 km au-dessus de la Terre, la température est une fonction affine de l'altitude, soit la relation suivante :

$$T(z) = az + b$$

avec z l'altitude en kilomètres, T la température en kelvin, a et b des constantes.

Q8. Sachant qu'au niveau du sol la température est de $15°C$ et de $-50°C$ à une altitude de $10\ km$, déterminer les coefficients a et b en précisant leur unité.

Q9. En assimilant l'air à un gaz parfait de masse volumique $\mu(z)$ et de masse molaire M_{air}, exprimer la masse volumique en fonction de M_{air}, R (constante des gaz parfaits), z, a, b et $P(z)$ (pression à l'altitude z).

Q10. En supposant le fluide en équilibre, appliquer le principe de la statique des fluides puis déterminer la pression en un point de la troposphère en fonction de z, a, b, M_{air}, R, g l'accélération de la pesanteur et de $P(0)$ la pression au niveau du sol. Pourquoi g peut-elle être considérée comme constante ?

Données :

constante de Boltzmann $k_B = 1,38.10^{-23}\ J.K^{-1}$

masse de la Terre $M = 6.10^{24}\ kg$

masse atomique molaire de l'azote $M_N = 14\ g.mol^{-1}$

masse atomique molaire de l'oxygène $M_O = 16\ g.mol^{-1}$

rayon de la Terre $R_T = 6400\ km$

constante de gravitation $k_G = 6,672.10^{-11}\ N.m^{-2}.kg^{-1}$

capacité thermique massique du platine $c = 133\ J.kg^{-1}.K^{-1}$

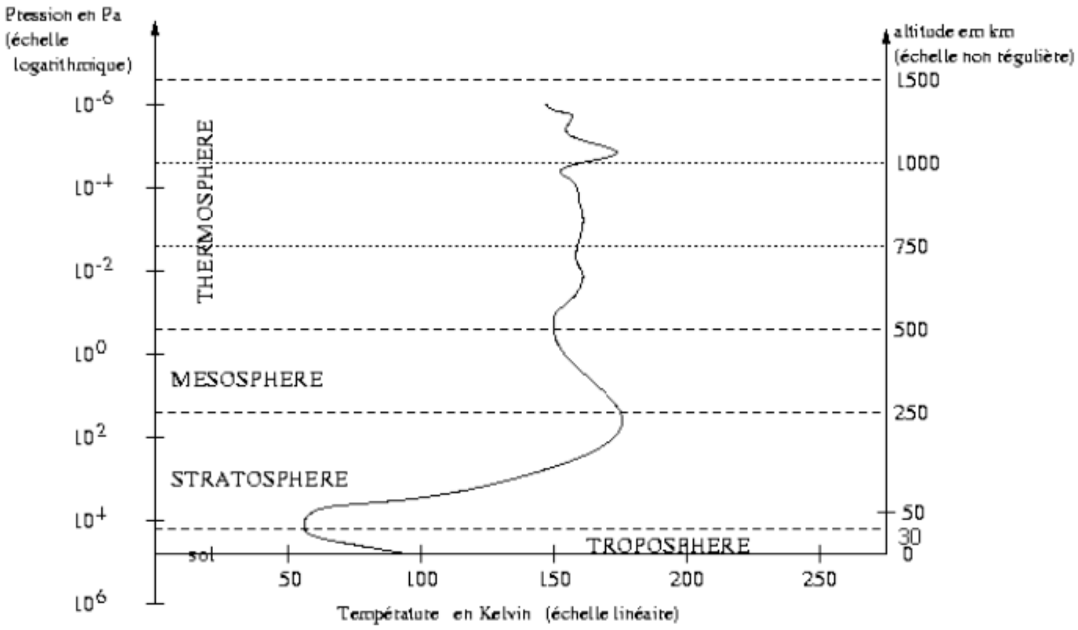
indice de réfraction du verre $n_{verre} = 1,5$

indice de réfraction de l'air $n_{air} = 1,0$

3. Troisième partie : l'atmosphère de Titan

Saturne possède un satellite remarquable, Titan, sur lequel la sonde Huygens, véhiculée par la capsule spatiale Cassini, s'est posée avec succès le 14 janvier 2005. Les capteurs embarqués ont permis d'enregistrer les variations de la pression et de la température en fonction de l'altitude.

La figure suivante donne sur l'axe de gauche la pression de l'atmosphère en pascals, en échelle logarithmique, sur l'axe de droite l'altitude correspondante en km, en échelle non régulière, et sur l'axe horizontal la température en Kelvin en échelle linéaire. La courbe tracée permet donc de suivre l'évolution de la température en fonction de l'altitude ou de la pression.



On admettra que dans l'atmosphère, l'accélération de la pesanteur de Titan garde une valeur constante $g_T = 1{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. On note $R = 8{,}3\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits. On note $\mu(z)$ la masse volumique du gaz et $P(z)$ sa pression à l'altitude z.

Q24. On assimile la mésosphère et la thermosphère à un gaz parfait en évolution isotherme de masse molaire M. En écrivant l'équation d'état des gaz parfaits et la loi de la statique des fluides, établir l'équation différentielle vérifiée par $P\,(z)$.

Q25. Résoudre cette équation sans chercher à déterminer la constante d'intégration et en déduire si le modèle adopté est conforme avec les données de la figure.

Q26. Dans la troposphère, on admet que le principal constituant est le diazote N_2, de masse molaire $M = 28\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, assimilé à un gaz parfait de rapport des capacités calorifiques $\gamma = 1{,}4$, et que les évolutions sont adiabatiques et réversibles. On note P_0 et μ_0 les valeurs de la pression et de la masse volumique au niveau du sol. Etablir l'expression de la pression P en fonction P_0, μ_0, γ, g_T et z. Déterminer une valeur approchée de l'altitude à laquelle P s'annule et en déduire si le modèle adopté est conforme avec les données de la figure.