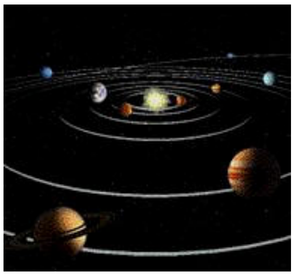
Trajectoires, méthode d'Euler

L'objectif de cette séance est la résolution numérique des trajectoires de différents objets (projectile, satellite, particule) en utilisant la méthode d'**Euler**. En effet, dans la pratique, les équations différentielles du mouvement issu des lois de la mécanique classique ne possèdent que rarement des solutions analytiques.



1) Balistique, trajectoire d'un projectile

On souhaite étudier le tir d'un projectile de masse $m = 1\,\text{kg}$ dans un champ de pesanteur $g = 9.8\,\text{m.s}^{-2}$ lancé à la vitesse initiale $v_0 = 150\,\text{m.s}^{-1}$ et sous divers angles de tir $\left(30°, 45°...\right)$ **dans l'air** avec la force de frottement $-k\vec{v}$. La méthode d'Euler est rappelée en annexe.

Rédiger un programme pour utiliser la méthode d'Euler.
Faire apparaître l'accélération, la vitesse puis la position.
Utiliser le temps t pour le compteur.
Construire la trajectoire comme une ligne brisée : `plot([l],style=line).`

2) Trajectoire d'un satellite

Utiliser la méthode d'Euler pour déterminer la **trajectoire d'un satellite dans le champ de gravité d'un astre** avec et sans frottement. On prendra :

$\Rightarrow$ Force de gravité : $-\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ c'est-à-dire $GMm = 1$.

$\Rightarrow$ Force de frottement : $-k\vec{v}$ avec $k = 0{,}1$.

$\Rightarrow$ Conditions initiales : $x = 0{,}5$; $y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = 1{,}63$. Vous pouvez ensuite changer les valeurs initiales si votre programme fonctionne. Le mouvement est plan, la variable z n'intervient pas.

$\Rightarrow$ $\text{pas} = 0.1$, on peut ensuite le diminuer pour être plus précis.

3) Diffusion de Rutherford

Reprendre la question **b)** en prenant cette fois une force répulsive du type $\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ et aucun frottement. La trajectoire obtenue représente par exemple la diffusion de particules alpha (noyau d'hélium) sur une mince feuille d'or (répulsion électrostatique) (expérience de Rutherford réalisée en 1911 et qui a mise en évidence l'existence de noyaux au sein de l'atome).

ANNEXE : Méthode d'Euler

Il s'agit d'une procédure simple qui permet de déterminer de façon numérique la trajectoire d'un point matériel soumis à la somme des forces $\vec{F}$ **connue**. L'équation différentielle qui gouverne le mouvement du point matériel est la seconde loi de Newton $\vec{a} = \vec{F}/m$ qui est du second ordre. Notre objectif est de déterminer $x\left(t\right)$ et $y\left(t\right)$, c'est-à-dire la trajectoire à partir de la connaissance de la loi de force, c'est-à-dire $F_x\left(x,y,v_x,v_y,t\right)$ et $F_y\left(x,y,v_x,v_y,t\right)$ (nous n'étudions que des trajectoires planes à deux dimensions).

La structure du programme sera la suivante :

1) déclaration des variables réelles :
$>\left(x,y\right)$ coordonnées de la position
$>\left(v_x,v_y\right)$ coordonnées de la vitesse
$>t$ le paramètre temps
$>h$ l'incrément de temps
$>\left(x_0,y_0\right)$ coordonnées de la position initiale
$>\left(v_{x0},v_{y0}\right)$ coordonnées de la vitesse initiale

2) Ecriture des coordonnées de l'accélération en tant que fonction :

$$> a_x\left(x,y,v_x,v_y,t\right)=\frac{F_x\left(x,y,v_x,v_y,t\right)}{m}$$
$$> a_y\left(x,y,v_x,v_y,t\right)=\frac{F_y\left(x,y,v_x,v_y,t\right)}{m}$$

3) Entrée par l'utilisateur :
$h, x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}$
Affectations :
$> x := x_0$
$> y := y_0$
$> v_x := v_{x0}$
$> v_y := v_{y0}$

4) Incrémentation :
$> v_x := v_x + a_x * h$
$> v_y := v_y + a_y * h$
$> x := x + v_x * h$
$> y := y + v_y * h$
$> t := t + h$

N Boucles

Fin

A la fin on récupère les résultats sont formes de tableaux :

$$v_x\begin{pmatrix} v_{x1}\left(t_1\right)\\ v_{x2}\left(t_2\right)\\ \ldots\\ v_{xN}\left(t_N\right)\end{pmatrix}\quad v_y\begin{pmatrix} v_{y1}\left(t_1\right)\\ v_{y2}\left(t_2\right)\\ \ldots\\ v_{yN}\left(t_N\right)\end{pmatrix}\quad x\begin{pmatrix} x_1\left(t_1\right)\\ x_2\left(t_2\right)\\ \ldots\\ x_N\left(t_N\right)\end{pmatrix}\quad y_x\begin{pmatrix} y_1\left(t_1\right)\\ y_2\left(t_2\right)\\ \ldots\\ y_N\left(t_N\right)\end{pmatrix}$$

La dernière ligne de l'incrémentation montre que le pas h s'identifie à un incrément temporel Δt. La première ligne incrémente la vitesse :

$$\Delta v_x = v_x\left(t+\Delta t\right)-v_x\left(t\right)=a_x\left(t\right)\Delta t\,,$$

et la seconde la position :

$$\Delta x = x\left(t+\Delta t\right)-x\left(t\right)=v_x\left(t\right)\Delta t\,.$$

Il en est de même suivant y Pour h « suffisamment petit », l'algorithme précédent est un schéma des relations

$$a_x\left(t\right)=\frac{dv_x\left(t\right)}{dt}\underset{\Delta t\to 0}{=}\frac{v_x\left(t+\Delta t\right)-v_x\left(t\right)}{\Delta t}\ \text{et}\ v_x\left(t\right)=\frac{dx\left(t\right)}{dt}\underset{\Delta t\to 0}{=}\frac{x\left(t+\Delta t\right)-x\left(t\right)}{\Delta t}$$

dont il réalise l'intégration.

<u>Remarque:</u> $-\frac{\vec{r}}{r^3}=-\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{i}-\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j}$