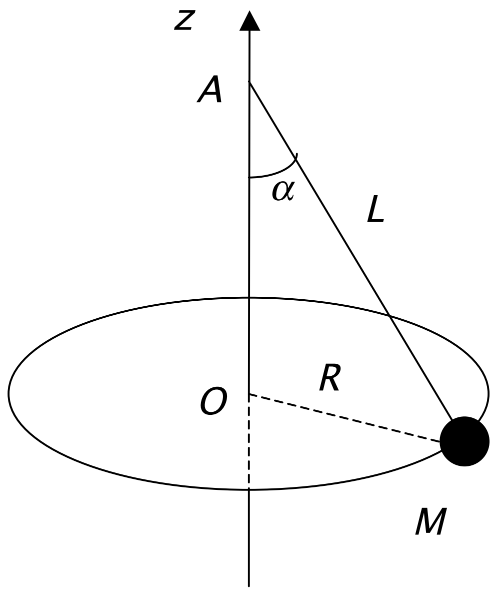
Mécanique série n°6: Théorème du moment cinétique

Exercice 1 : Pendule conique ◆

Dans un champ uniforme de pesanteur g, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe Oz dirigé vers le haut en décrivant un cercle de centre O et de rayon R. M est suspendu à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable fixé en un point A de Oz.
L'angle α de Oz avec AM est constant. Faire un schéma.



On travaille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
On utilisera le repère de la base cylindrique telle que $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r}$.

a) Exprimer le moment cinétique de M par rapport à A en fonction de m, L, α , ω.

b) Appliquer le théorème du moment cinétique pour déduire $\cos\alpha$ en fonction de g, L, ω.
c) Retrouver ce résultat à partir de la relation fondamentale de la dynamique.

Exercice 2 : Pendule simple ◆◆

Un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle M, de masse m, suspendue à un fil inextensible de longueur ℓ. Il ne peut osciller que dans un plan repéré par les axes Ox et Oy, O est le point de fixation du fil, Ox est horizontal, Oy vertical. La position du fil est déterminée par l'angle θ qu'il fait avec la verticale.
Les frottements visqueux sont notés $\vec{f_r} = -\alpha\vec{v}$. Le point est soumis à son poids et à une force excitatrice portée par Ox, $\vec{F} = F_m\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$.

a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en appliquant le théorème du moment cinétique.

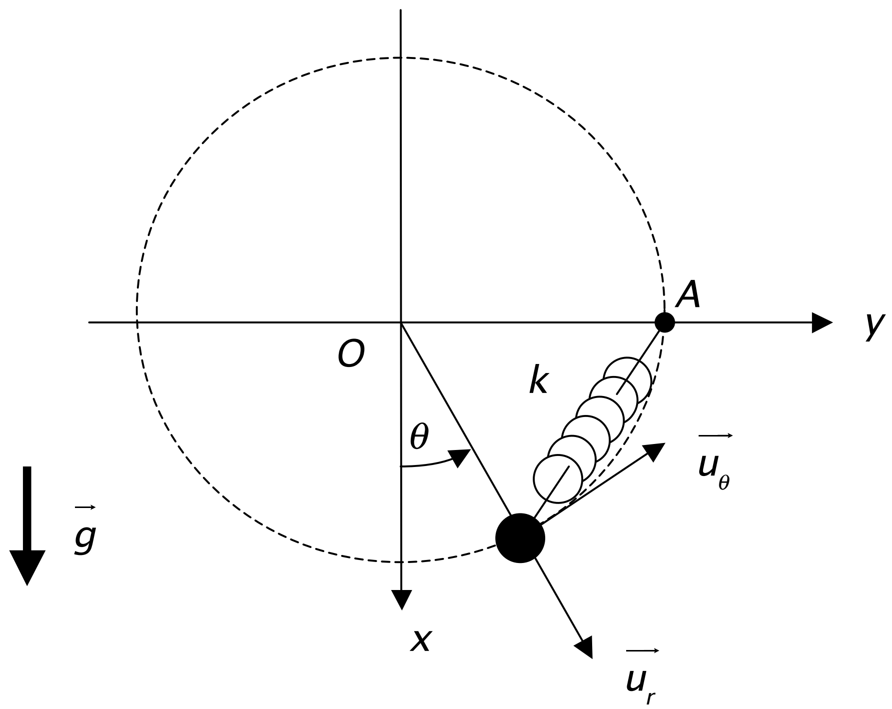
b) Si l'angle θ est petit montrer qu'on obtient une équation différentielle linéaire du second ordre pour $x(t)$ abscisse de M.

c) Pour étudier le régime d'oscillations forcées on écrit: $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. Déterminer X_m et φ .

d) Donner l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z} = \underline{F} / \underline{V}$.
On désigne par $\underline{F}$ l'amplitude complexe de la force excitatrice et $\underline{V}$ l'amplitude complexe de la vitesse. Tracer l'allure des courbes du module et de l'argument de $\underline{Z}$ en fonction de ω.

<u>Exercice 3 : Cerceau et ressort</u> ◆◆

Un point matériel de masse m est assujetti à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O. Il est lié au point A par un ressort de raideur k et de longueur au repos négligeable.



a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant le théorème du moment cinétique.

b) Discuter l'existence de positions d'équilibre, leur stabilité, et dans l'affirmative, la période des petites oscillations au voisinage de l'équilibre.