THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

PRELUDE

(Pour la culture et pour mieux comprendre l'intérêt de ce que l'on étudie, mais ce n'est pas au programme)

La mécanique classique (ou Newtonienne) introduit des notions premières comme la masse, l'accélération, les forces. Ces notions sont suffisantes pour étudier des problèmes qui ne nécessitent que la mécanique classique. Cependant, comme on l'a vu, de nouveaux concepts ont été introduits au cours de l'élaboration de la théorie, en particulier l'énergie mécanique, à cause du **caractère conservatif** de ces grandeurs (c'est-à-dire que ces grandeurs gardent une valeur constante au cours de l'évolution du système physique au cours du temps).

Les trois grandeurs physiques conservatives suivantes jouent un rôle central en mécanique :

$\rightarrow \vec{p}$ = **quantité de mouvement** ($= m\vec{v}$ en mécanique classique), grandeur vectorielle.
$\rightarrow E$ = **l'énergie**, grandeur scalaire.
$\rightarrow \vec{L}$ = **le moment cinétique** (défini dans ce chapitre), grandeur vectorielle.

La validité des principes de conservation de $\vec{p}, \vec{L}, E$ s'étend à toute la physique ce qui fait que l'on retrouve ces grandeurs aussi bien en physique quantique, qu'en relativité etc…La notion première qu'est la force en mécanique classique a disparu dans les nouvelles théories physiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle (physique quantique…).

Le **théorème de Noether** (mathématicienne allemande 1882-1935) permet de relier la conservation de $\vec{p}, \vec{L}, E$ aux invariances des lois de la physique :

$\rightarrow$ La conservation de $\vec{p}$ est une conséquence de l'invariance des lois de la physique par translation spatiale, c'est-à-dire de l'homogénéité de l'espace.

$\rightarrow$ La conservation de $\vec{L}$ est une conséquence de l'invariance des lois de la physique par rotation, c'est-à-dire de l'isotropie de l'espace.

$\rightarrow$ La conservation de E est une conséquence de l'invariance des lois de la physique par translation temporelle, c'est-à-dire de l'homogénéité du temps.

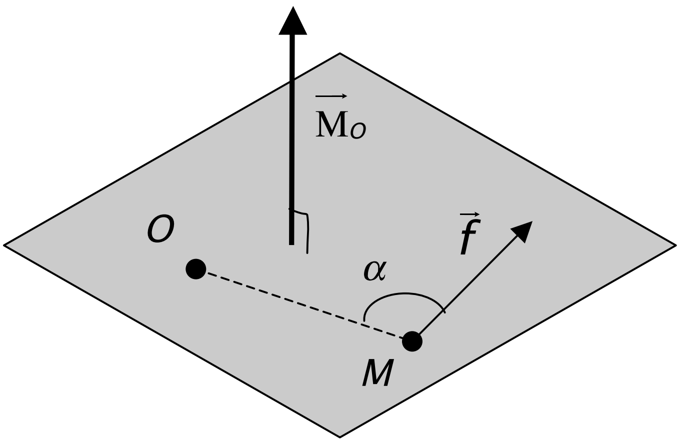
I – Moment d'une force

Le moment d'une force, par rapport à un point ou un axe, donne une mesure de la tendance qu'à une force à provoquer la rotation d'un corps par rapport à un point ou un axe.

1.1 Moment en un point

On considère une force $\vec{f}$ qui s'applique en un point *M*.

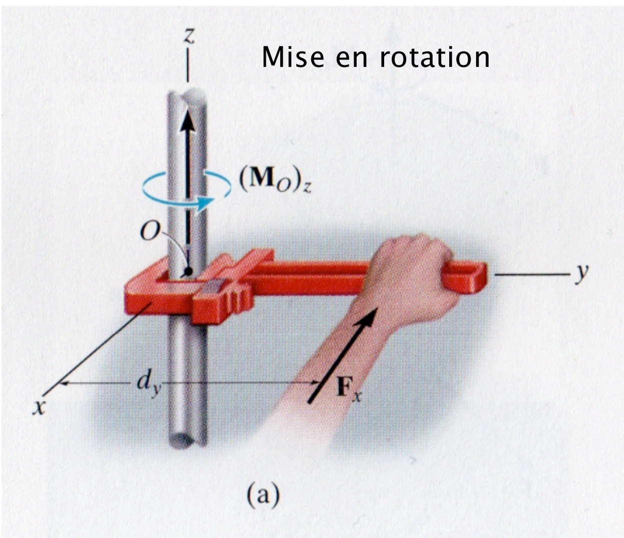
$$\overrightarrow{\mathrm{M}_O} \equiv \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$



Par définition $\overrightarrow{\mathrm{M}_o}$ est le **moment de la force $\vec{f}$ par rapport au point *O***. Il s'exprime en N.m et il s'agit d'une grandeur vectorielle. Il est perpendiculaire au plan contenant $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{f}$ par définition du produit vectoriel. $\overrightarrow{OM}, \vec{f}, \overrightarrow{\mathrm{M}_O}$ forment un trièdre direct (règle du tire bouchon ou de la main droite).

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{M}_O}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \times \left\|\vec{f}\right\| \times \sin\alpha$$

Si O appartient à la droite $\left(M, \vec{f}\right)$, alors $\overrightarrow{\mathrm{M}_O} = \vec{0}$.



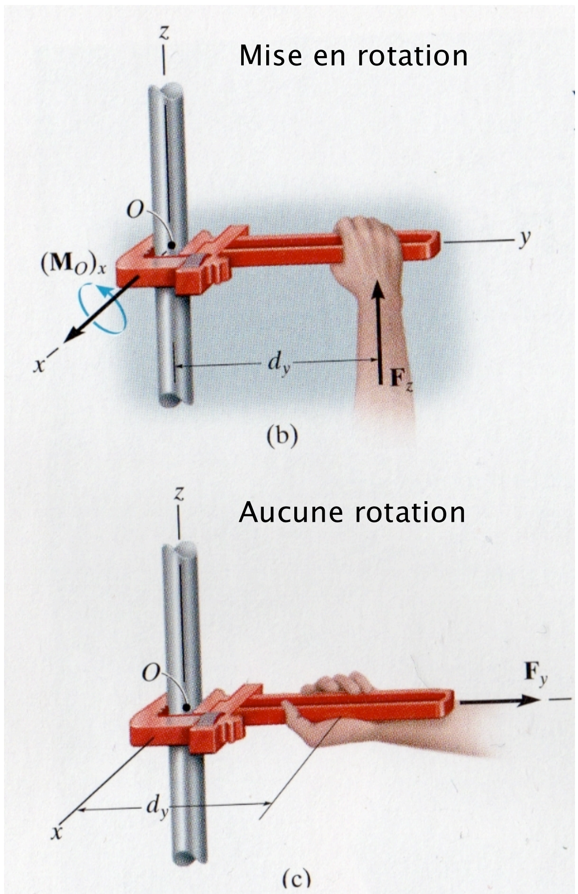
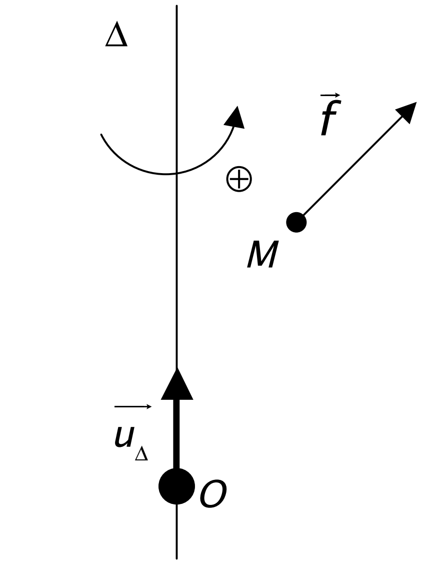


Figure a,b,c : Effet d'un moment d'une force.

1.2 Moment par rapport à un axe

a) Cas général



Δ est orienté suivant $\overrightarrow{u_\Delta}$

$$\boxed{\mathrm{M}_\Delta \equiv \overrightarrow{\mathrm{M}_O} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

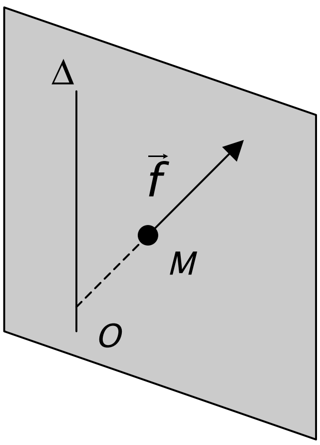
Par définition M_Δ est le **moment de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe Δ orienté**. Il s'exprime en N.m^2 et il s'agit d'une grandeur scalaire.

$\boxed{\forall O \in \Delta,\ \mathrm{M}_\Delta \text{ est identique}}$

En effet :

$$\mathrm{M}_\Delta = \overrightarrow{\mathrm{M}_O} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \left(\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right) \wedge \vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$
$$= \underbrace{\left(\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}_{=0} + \overrightarrow{\mathrm{M}_{O'}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{\mathrm{M}_{O'}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

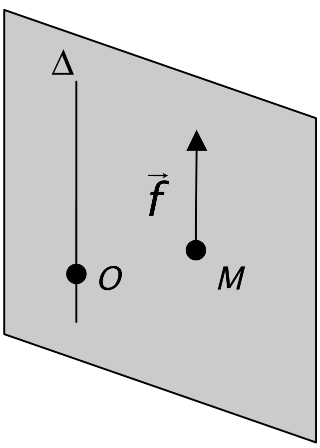
b) Force passant par l'axe



La droite $\left(M, \vec{f}\right)$ coupe l'axe Δ en un point O.

$\overrightarrow{\mathrm{M}_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$ donc $\boxed{\mathrm{M}_\Delta = 0}$. Ceci est vrai pour tout point O appartenant à Δ.

c) Force parallèle à l'axe

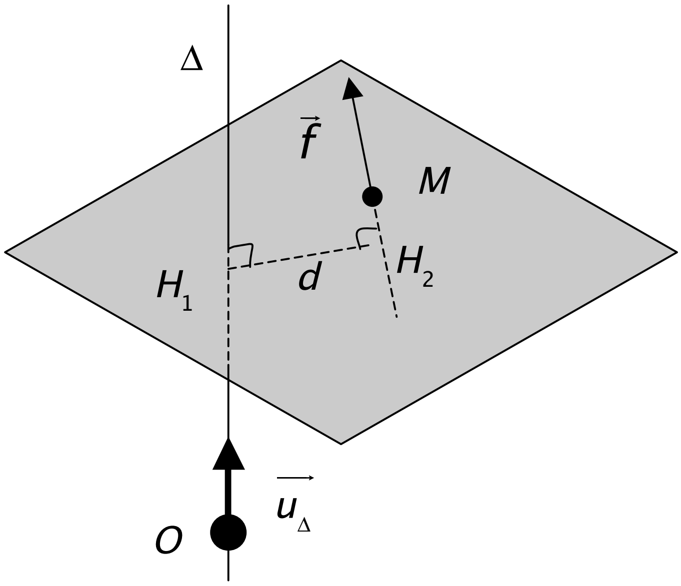


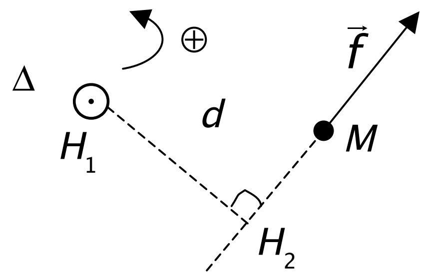
$\overrightarrow{\mathrm{M}_O} \perp \overrightarrow{OM}$ et $\vec{f}$, comme $\vec{f} \parallel \Delta$ alors $\overrightarrow{\mathrm{M}_O} \perp \Delta$ ainsi:

$$\boxed{\mathrm{M}_\Delta \equiv \overrightarrow{\mathrm{M}_O} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0}$$

Il s'agit ici d'un cas particulier du cas b) pour lequel le point O est rejeté à l'infini.

d) Force perpendiculaire à l'axe, notion de **bras de levier**



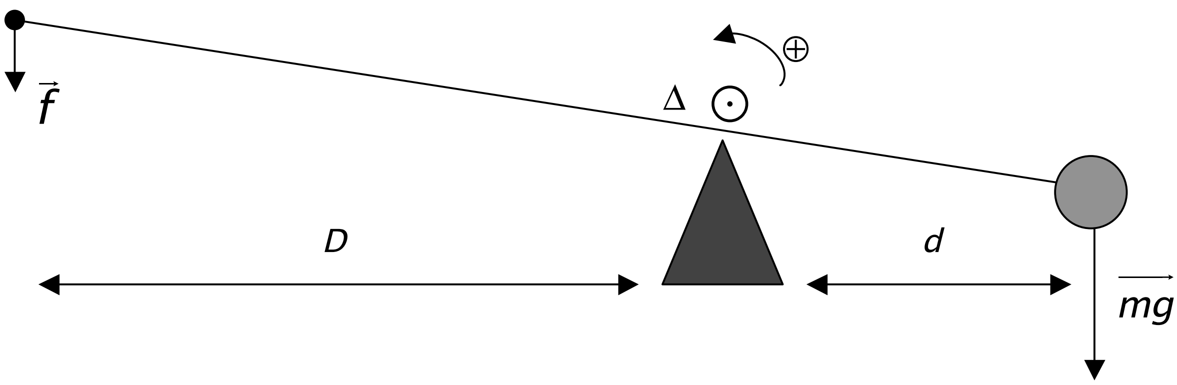


$$\mathrm{M}_\Delta = \left(\overrightarrow{H_1M} \wedge \vec{f}\right).\overrightarrow{u_\Delta} = \left(\left(\overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2M}\right) \wedge \vec{f}\right).\overrightarrow{u_\Delta} = \left(\overrightarrow{H_1H_2} \wedge \vec{f}\right).\overrightarrow{u_\Delta} = \left|H_1H_2 \times f\right|$$

$\left\|\mathrm{M}_\Delta\right\| = f\,d$ avec $H_1H_2 = d =$ **le bras de levier**.
$\mathrm{M}_\Delta > 0$ si M_Δ fait tourner *M* autour de Δ dans le sens positif (règle du tire bouchon).
$\mathrm{M}_\Delta < 0$ si M_Δ fait tourner *M* autour de Δ dans le sens négatif.

Application : le levier

« Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde » Archimède.



On souhaite soulever une masse m en exerçant une force $\vec{f}$ telle que $\left\|\vec{f}\right\| = f < mg$. Comment faire ? Nous allons utiliser le levier représenté sur la figure ci-dessus.

On arrive à soulever la masse si l'on fait tourner dans le sens positif le levier autour de l'axe Δ perpendiculaire au plan de la feuille.

Vous verrez en deuxième année que cela est possible si $\boxed{f\,D > m\,g\,d}$, c'est-à-dire que si la moment de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe Δ est supérieur au moment du poids par rapport au même axe. Il faut donc que $f > mg\dfrac{d}{D}$. Comme $f < mg$, cela implique que $D \gg d$. En utilisant un grand bras de levier *D*, on obtient une **démultiplication d'une action motrice** d'où l'intérêt du levier connu depuis longtemps par l'humanité.

II –Moment cinétique

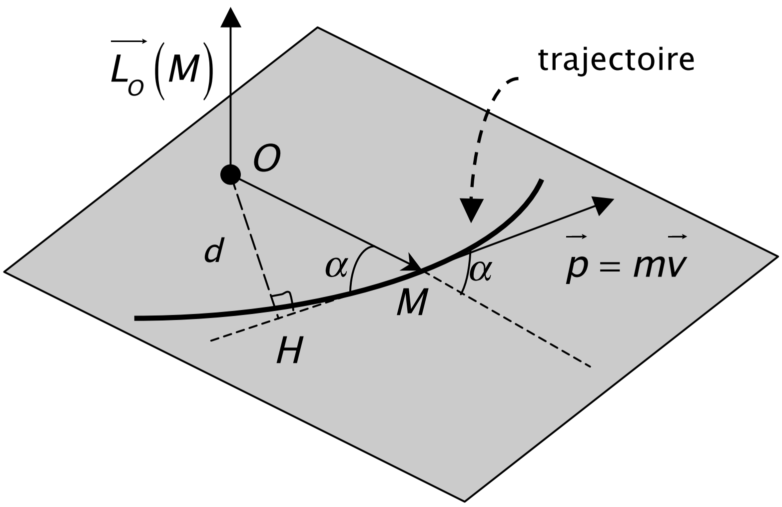
2.1 Moment cinétique par rapport à un point

Soit un point *O* dans un référentiel $\Re$ et un point ponctuel *M* de masse *m* animé d'une vitesse $\vec{v}(M)_\Re$ dans ce même référentiel.

$$\boxed{\overrightarrow{L_O}(M)_\Re \equiv \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M)_\Re = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)_\Re}$$

$\overrightarrow{L_O}(M)_\Re$ est le moment cinétique du point *M* par rapport au point *O* dans le référentiel $\Re$. Il faut toujours spécifier dans quel référentiel on exprime le moment cinétique car son expression dépend du référentiel d'étude à cause de la vitesse du point *M*. Par la suite, s'il n'y a pas d'ambigüité, on enlève le $\Re$ et on notera simplement $\overrightarrow{L_O}(M)$.

$\overrightarrow{L_O}(M)$ s' exprime en kg.m^2.s^{-1}.



$\overrightarrow{L_O}(M) \perp$ à $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{p}$ donc à $\vec{v}$.

$\left\|\overrightarrow{L_O}(M)\right\| = mv(OM)\sin\alpha$ donc :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{L_O}(M)\right\| = mvd}$$

Changement d'origine :

$$\overrightarrow{L_{O'}}(M) = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{p} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge \vec{p}$$

$$\boxed{\overrightarrow{L_{O'}}(M) = \overrightarrow{L_O}(M) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}}$$

2.2 Moment cinétique par rapport à un axe

Nous allons montrer que $\overrightarrow{L_O}(M).\overrightarrow{u_\Delta}$ ne dépend pas du point *O* qui appartient à l'axe Δ. Soit *O'* appartenant à Δ.

$$\overrightarrow{L_O}(M).\overrightarrow{u_\Delta} - \overrightarrow{L_{O'}}(M).\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{u_\Delta}.\left(\overrightarrow{L_O} - \overrightarrow{L_{O'}}\right) = \overrightarrow{u_\Delta}.\left(-\underbrace{\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}}_{\perp \text{ à } \overrightarrow{OO'}}\right) = 0$$

Ainsi $\boxed{L_\Delta(M)_\Re = \overrightarrow{L_O}(M)_\Re . \overrightarrow{u_\Delta}}$ est la projection de $\overrightarrow{L_O}$ sur l'axe Δ qui est indépendant du point O appartenant à cet axe.

III –Théorème du moment cinétique

3.1 Application en un point fixe

Soit **O un point fixe** (hypothèse essentielle) dans un **référentiel galiléen** $\Re_g$ (autre hypothèse essentielle). On considère un point matériel M de masse m de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ dans $\Re_g$ soumis à la résultante des forces $\vec{F} = \sum \vec{f}$.

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right) = m\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + m\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$, on utilise le PFD, $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{f} = \vec{F}$:

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \underbrace{m\vec{v} \wedge \vec{v}}_{=0} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$ ce qui donne finalement le théorème du moment cinétique :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{F}\right) \text{ dans un référentiel galiléen}}$$

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point M, par rapport à un point fixe dans un référentiel galiléen, est égale au moment de la somme des forces, par rapport au même point fixe, auquel il est soumis.
Notons que le moment de la somme des forces est égale à la somme des moments de chaque force. En effet $\overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{f} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \sum \overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{f}\right)$.

Remarques importantes :

→ Le théorème du moment cinétique (abrégé par TMC ici, pas dans une copie…) est une équation vectorielle, il donne donc trois équations scalaires comme le principe fondamental de la dynamique (PFD).

→ Le théorème du moment cinétique n'implique rien de plus à priori que le principe fondamental de la dynamique. Cependant il est très utilisé, car plus pratique, dans l'étude des systèmes en rotation (voir cours de mécanique en PT). Pour les systèmes en translation, le PFD est plus pratique. On peut dire que le TMC est l'équivalent du PFD pour les systèmes en rotation.

→ Le TMC est très utile et très riche d'un point de vue conceptuel dans la description des systèmes à forces centrales conservatives (étude dans le prochain chapitre) car dans ce cas, il y a conservation de $\overrightarrow{L_O}$ et $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{0}$.

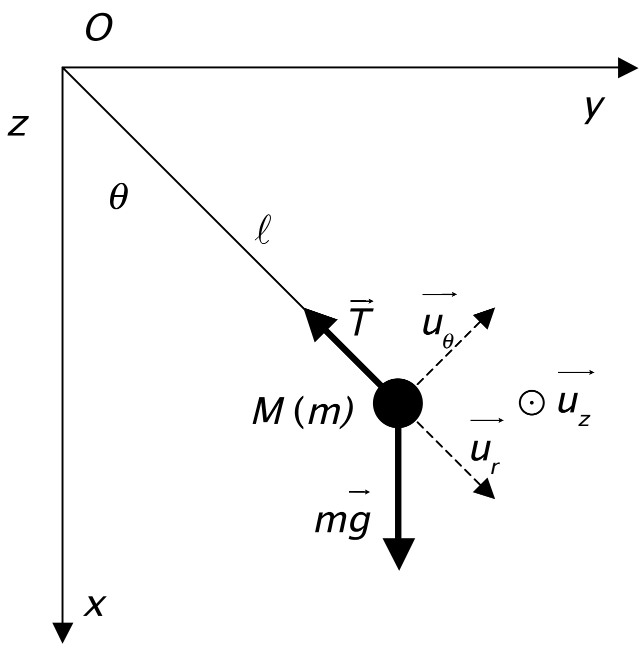
Le tableau ci-dessous fait le parallèle entre le mouvement de translation et le mouvement de rotation pour le point matériel. Ce tableau sera à compléter (et sera de fait plus pertinent) avec le cours de physique de PT ou le mouvement de rotation sera étudié plus en détails mais aussi avec le cours de SI dans le cas de l'étude du mouvement des solides.

Translation	Rotation
Principe fondamental de la dynamique : $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$	Théorème du moment cinétique : $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}=\overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{F}\right)$
Quantité de mouvement : $\vec{p}$	Moment cinétique : $\overrightarrow{L_O}$
Somme des forces : $\vec{F}=\sum\vec{f}$	Somme des moments : $\overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{F}\right)=\sum\overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{f}\right)$
$\vec{p}$ est constant (conservé) si $\sum\vec{f}=\vec{0}$	$\overrightarrow{L_O}$ est constant (conservé) si $\sum\overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{f}\right)=\vec{0}$

3.2 Application du TMC par rapport à un axe fixe

Δ est un axe fixe dans $\Re_g$, on projette simplement le TMC sur l'axe Δ. $d\overrightarrow{L_O}/dt.\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{M}_O}.\overrightarrow{u_\Delta}$ donc $\boxed{dL_\Delta/dt=\mathrm{M}_\Delta}$. Cette forme est très utile dans la description d'un système en rotation autour d'un axe Δ (roue etc…). On a accès ainsi très rapidement à l'équation du mouvement (voir cours de mécanique en PT).

IV –Application à l'étude du pendule simple



Notre objectif est de trouver l'équation du mouvement du pendule simple, c'est-à-dire de trouver $\theta(t)$. Il est pratique d'utiliser le TMC quand une force de liaison passe par un point fixe O car, dans ce cas, son moment est nul. C'est le cas ici avec $\vec{T}$

<u>Système étudié :</u> la bille de masse m assimilée à un point ponctuel dans le référentiel galiléen du laboratoire..

<u>Bilan des forces :</u>

- le poids de la bille $m\vec{g}$
- la tension $\vec{T}$ du fil

<u>Application du théorème du moment cinétique par rapport au point O fixe</u>

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}=\overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{F}\right)=\overrightarrow{OM}\wedge\left(\overrightarrow{mg}+\vec{T}\right)=\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{mg}+\underbrace{\overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}}_{=0}=\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{mg}$$

$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{mv} = \ell\overrightarrow{u_r} \wedge m\ell\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = m\ell^2\dot{\theta}\left(\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}\right) = m\ell^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$ (ici $\ell =$ constante)

$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{mg} = \ell\overrightarrow{u_r} \wedge mg\left(\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}\right) = -g\ell m\sin\theta\,\overrightarrow{u_z}$

<u>Obtention de l'équation du mouvement</u> (projection sur $\overrightarrow{u_z}$)

$ml^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$ soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$, il s'agit d'une équation différentielle non linéaire. Si θ est petit, on a $\sin\theta \simeq \theta$, on linéarise l'équation différentielle qui devient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique que l'on a déjà étudié et que l'on a aussi établi avec le PFD. La solution de cette équation est :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_m\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) \text{ avec } \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}} \text{ et } T_0 \equiv 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

θ_m et φ sont déterminées par les conditions initiales.