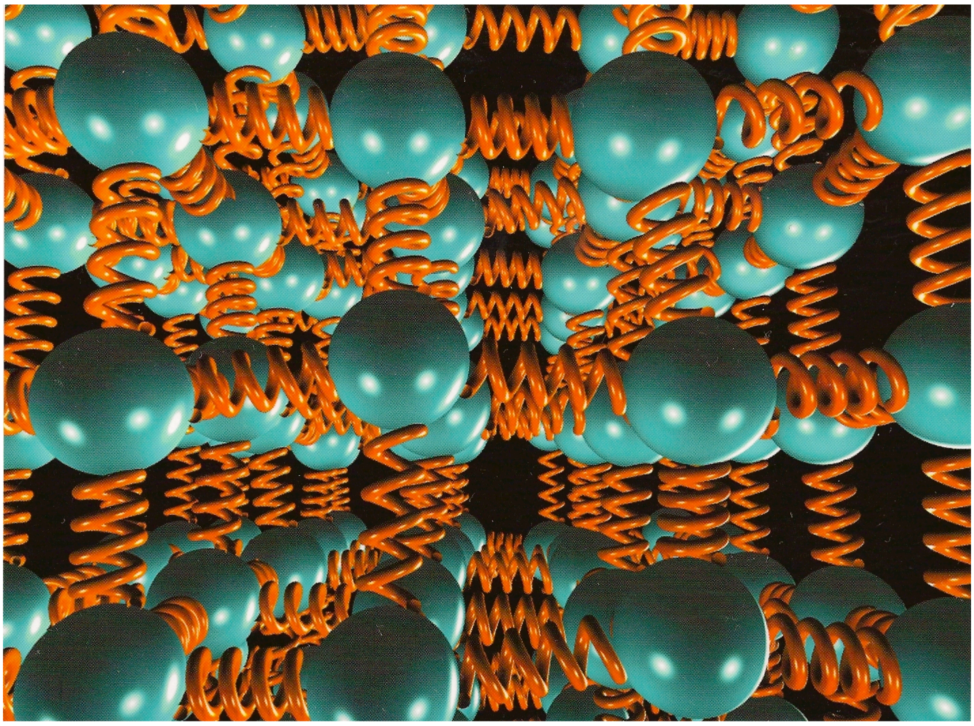
MOUVEMENT LIBRE D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE

Dans ce chapitre, nous allons étudier les petits mouvements d'un système physique autour d'une position d'équilibre stable, ce problème se pose dans de **nombreuses branches de la physique** :

- En mécanique : étude du mouvement d'une masse liée à une ressort, étude du mouvement d'un pendule simple…
- En électrocinétique : étude de l'évolution de la charge d'un condensateur dans un circuit série *RLC*…
- En chimie : étude des vibrations d'une molécule diatomique, modélisation des liaisons interatomiques dans un solide cristallin (cf figure ci-dessous)…



- En optique : étude de l'interaction des électrons avec un champ électrique (modèle de l'électron élastiquement lié)…

Cette liste n'est bien sur pas exhaustive. L'étude de ces divers systèmes physiques conduit a un **traitement mathématique identique**. En effet, leur évolution temporelle est régie par une équation différentielle du second ordre à coefficient constant.

Dans ce chapitre, on travaillera dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les systèmes physiques étudiés seront décrits par un seul degré de liberté. Par exemple, une masse liée à un ressort est décrite par sa position $x(t)$, un pendule simple est décrit par un angle $\theta(t)$, un circuit *RLC* par la charge du condensateur $q(t)$ etc…

I – Oscillateur harmonique

1.1 Equation du mouvement

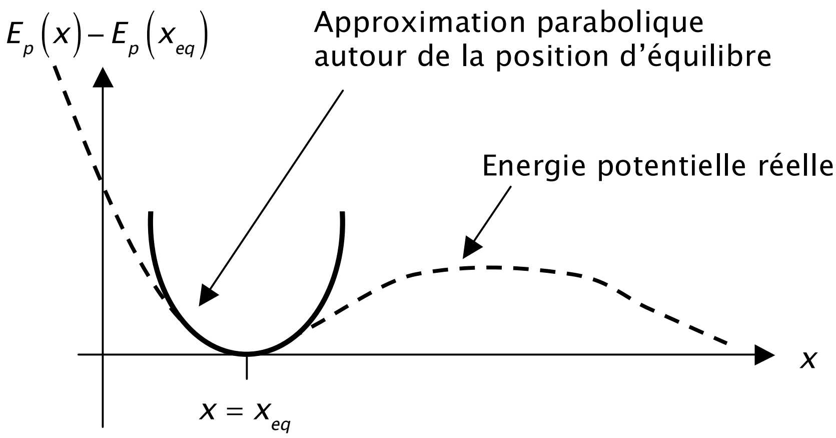
On considère une particule de masse m qui est soumise à une force conservative. On travaille à un degré de liberté (c'est-à-dire à une dimension). L'application du principe fondamental de la dynamique sur un axe (Ox) donne :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}.$$

On prend pour position d'équilibre $x = x_{eq}$. Quand l'équilibre est stable, on a $\left(\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} > 0$.

On va effectuer un développement limité de $E_p(x)$ au voisinage de la position d'équilibre x_{eq} ce qui donne :

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + (x - x_{eq})\left(\frac{dE_p(x)}{dx}\right)_{x=x_{eq}} + \frac{(x - x_{eq})^2}{2}\left(\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} + \dots,$$



ce qui donne au voisinage de la position d'équilibre, en notant $k \equiv \left(\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} > 0$,

$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \frac{(x - x_{eq})^2}{2}k$. On obtient une énergie potentielle de forme parabolique autour de la position d'équilibre comme le montre le schéma ci-dessus.

Au voisinage de l'équilibre, la force qui dérive de cette énergie est de la forme $F(x) = -k(x - x_{eq})$ qui est analogue à l'expression de la force de rappel élastique d'un ressort. L'équation différentielle du mouvement s'écrit : $m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k(x - x_{eq})$. Il est judicieux pour se simplifier la tache de prendre $x_{eq} = 0$ ce qui est identique à faire le changement de variable $X = x - x_{eq}$ avec $\ddot{X} = \ddot{x}$.

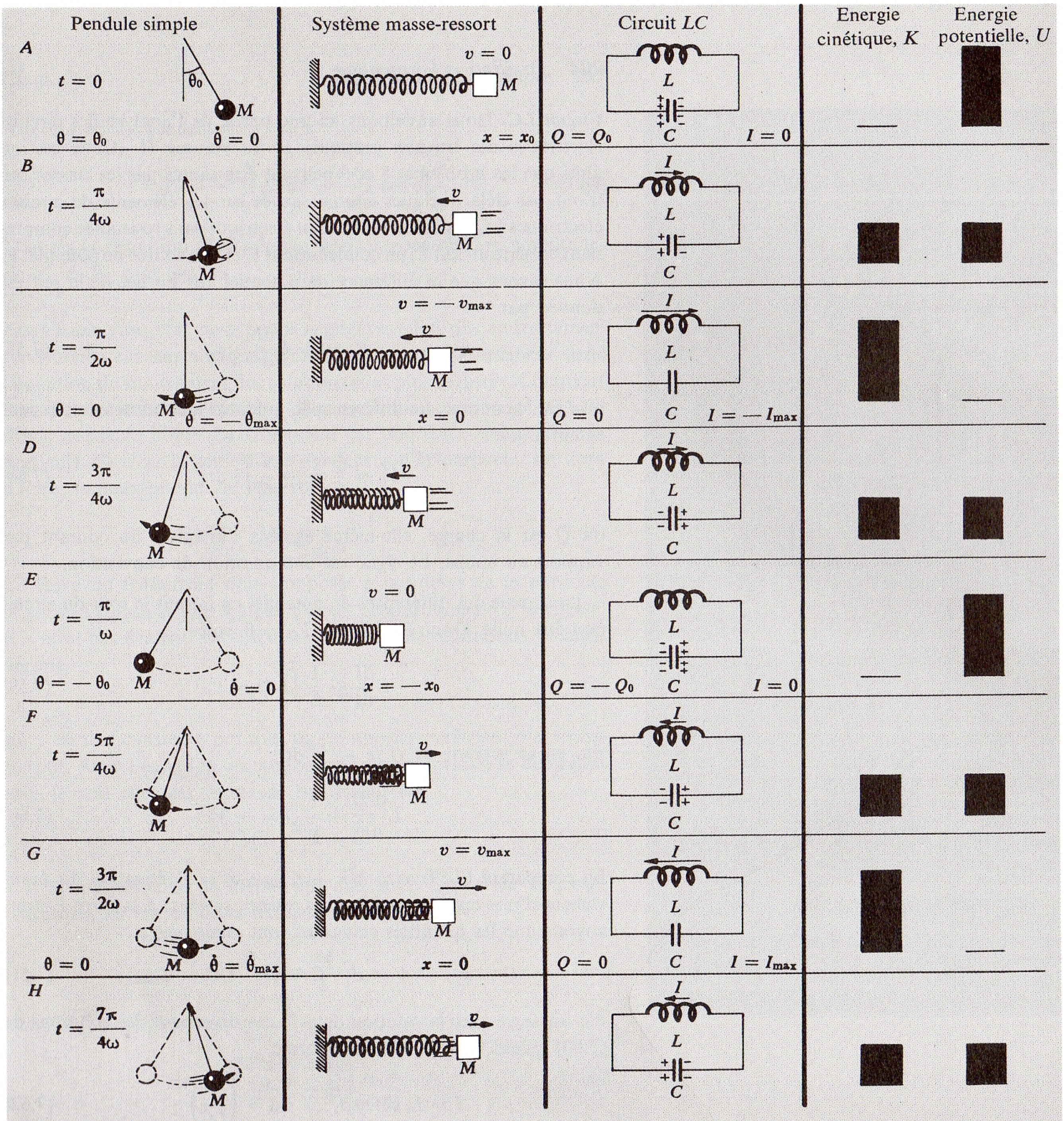
On obtient au final :

Au voisinage de la position d'équilibre $x_{eq} = 0$:

Equation différentielle du mouvement: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = 0$ avec $\omega_0 \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (1)

Force de rappel: $F = -k\,x$

ω_0 est homogène à une pulsation. L'équation différentielle du second ordre (1) que l'on a rencontré pour la première fois dans le cadre d'une masse liée à un ressort peut décrire l'évolution de nombreux systèmes physiques pour peu que cette **évolution reste proche de la situation d'équilibre**.



Trois oscillateurs harmoniques différents de même période : un pendule simple, un système masse-ressort, et un circuit *LC*. Le temps croît de la figure *A* à la figure *H*; le cycle suivant commence de nouveau avec la figure *A*.

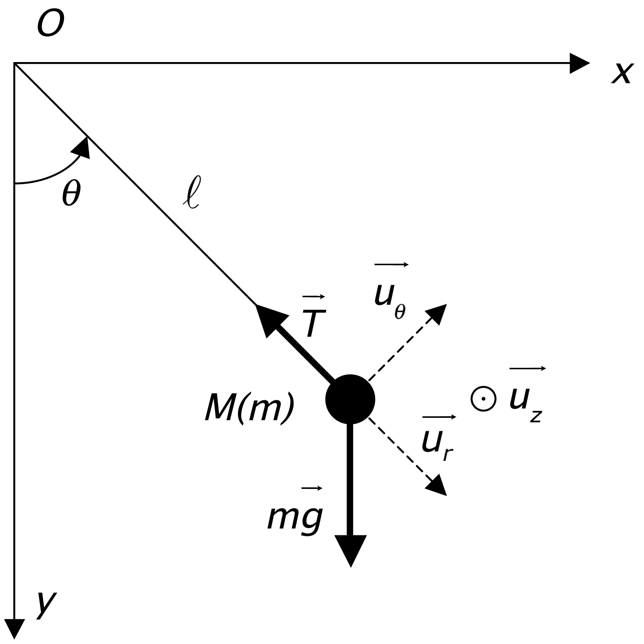
La figure ci-dessous montre différents systèmes physiques décrits par l'équation (1). Bien sur, à chaque fois x représente une grandeur physique différente et ω_0 s'exprime de façon différente en fonction des grandeurs physiques du problème. Mais dans tout les cas, on a un **phénomène physique oscillatoire en l'absence d'amortissement**.

1.2 Exemple du pendule simple

Dans cet exemple, notre objectif est de montrer que l'équation différentielle qui décrit l'oscillation d'un pendule simple, sans frottement et pour de petits angles, est l'équation (1).

Pour trouver l'équation du mouvement, nous pouvons utiliser **le principe fondamental de la dynamique** (2$^{\text{ème}}$ loi de Newton), **le théorème de l'énergie mécanique** et nous verrons plus tard que l'on peut utiliser **le théorème du moment cinétique**.

Nous allons utiliser ici une approche énergétique. Le schéma ci-dessous décrit le pendule simple.



$E_p\left(\vec{T}\right) = 0$ car $\vec{T} \perp$ au déplacement.

$E_p\left(m\vec{g}\right) = mg\ell\left(1-\cos\theta\right)$ avec $E_p\left(\theta = 0\right) = 0$.

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\ell\dot{\theta}\right)^2$.

$E_m = E_c + E_p$.

On ne va considérer que les faibles oscillations autour de $\theta = 0$. Si on fait un développement limité, on a $\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$ et dans ce cas $E_p\left(m\vec{g}\right) = \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$.

Si on se contente d'écrire $\cos\theta \approx 1$, on a $E_p\left(m\vec{g}\right) \approx 0$ ce qui est absurde.

Toutes les forces qui interviennent sont conservatives donc le théorème de l'énergie mécanique nous dit que $E_m = \text{constante}$, soit $\frac{dE_m}{dt} = 0$, ce qui donne $\frac{1}{2}m\ell^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta}+\frac{1}{2}mg\ell 2\theta\dot{\theta} = 0$.

On obtient donc l'équation différentielle du mouvement suivante, après simplification par $\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta}+\omega_0^{\,2}\theta = 0 \text{ avec } \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}} \text{ et } T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

1.3 Résolution

On a déjà résolution l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ dans le cours de cinématique. Nous allons rappeler les résultats obtenus. La solution est de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad X_m \equiv \text{amplitude} \\ \varphi \equiv \text{phase à l'origine et } T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \text{période} \end{array}}$$

Si à l'instant initial, $x(t=0) = x_0$ et $v(t=0) = v_0$ on a $\tan\varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$ et $X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$. Il est aussi possible d'écrire $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ ou A et B sont deux nouvelles constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales (vous pouvez faire cela en exercice).

On remarque que dans notre cas, c'est-à-dire les oscillations de petites amplitudes, T_0 ne dépend pas de l'amplitude X_m, on parle **d'isochronisme**. Cela n'est plus vrai dans le cas général, c'est-à-dire pour des oscillations d'amplitudes quelconques.

1.4 Etude énergétique

a) Energie mécanique

Si l'on prend comme origine de l'énergie potentielle $E_p(x=0) = 0$, on a $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Comme $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, $v(t) = -X_m\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$, ce qui donne : $E_m = \frac{1}{2}mX_m^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}k\,X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$. Si l'on utilise le fait que $X_m^2\omega_0^2 = X_m^2\frac{k}{m}$ et que $\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$ on peut écrire finalement :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}k\,X_m^2 \quad (2)}$$

a) Equipartition de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique

D'après l'équation (2), l'énergie mécanique est une constante du mouvement, on dit que le système est **conservatif** (il n'y a que des forces conservatives qui interviennent). Il n'y a aucune dissipation d'énergie étant donné que l'on n'a pris en compte aucune force de frottement. Il y a donc **un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle** au cours de l'évolution du système comme cela est illustré sur la figure du paragraphe 1-1 et sur la figure ci-dessous (A correspond à l'amplitude que l'on a notée X_m, U est l'énergie potentielle et K l'énergie cinétique).

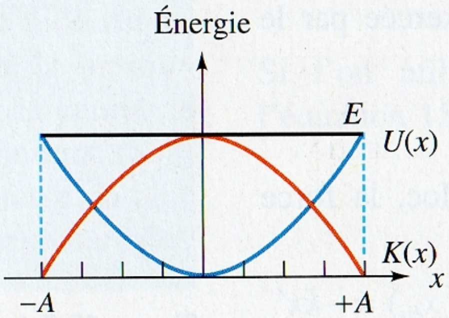


Figure 15.9 ▲
Les variations de l'énergie cinétique (courbe rouge), de l'énergie potentielle (courbe bleue) et de l'énergie mécanique (trait noir) en fonction de la position.

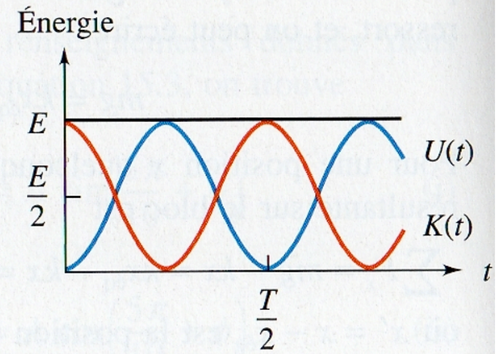


Figure 15.10 ▲
Les variations de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique en fonction du temps.

A un instant t on a : $E_p(t) = \frac{1}{2} k X_m^{\ 2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$ et $E_c(t) = \frac{1}{2} k X_m^{\ 2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$.

On cherche à calculer la valeur moyenne au cours du temps de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

On définie en mathématiques la moyenne temporelle $\langle f \rangle$ d'une fonction $f(t)$ par $\langle f \rangle = \lim\limits_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} f(t)dt$ de façon générale et par $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t)dt$ si la fonction est périodique de période T. Dans notre cas $E_p(t)$ et $E_c(t)$ sont périodiques de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Il est facile de montrer que :

$$\left\langle \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \right\rangle = \left\langle \frac{1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \text{ et } \left\langle \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \right\rangle = \left\langle \frac{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}.$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{4} k X_m^{\ 2} = \frac{E_m}{2}}$$

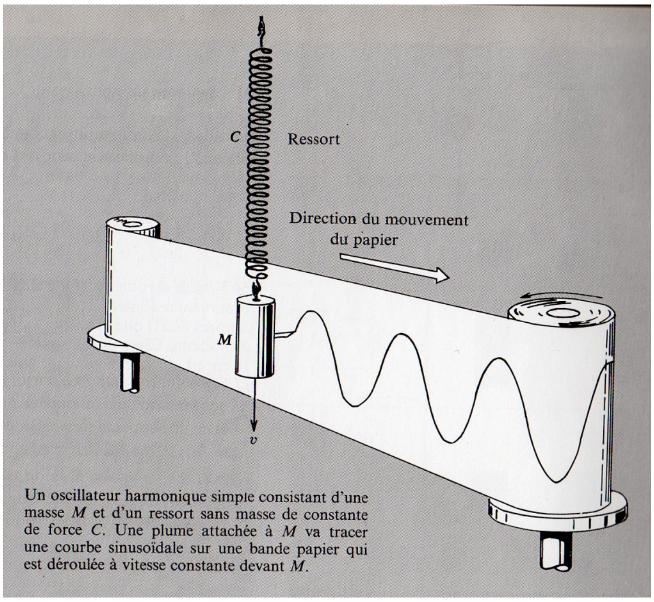
On constate qu'il y a en moyenne sur une période équipartition entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

II – Oscillations libres d'un oscillateur amorti

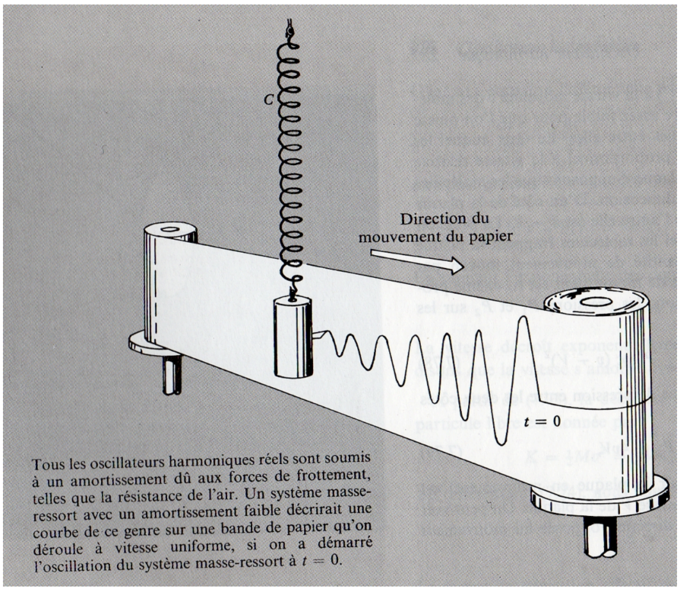
2.1 Oscillateur libre amorti par frottement fluide

Pour se rapprocher de la réalité, il faut tenir compte des pertes d'énergie provoquées par les diverses forces de frottement. Nous allons modéliser ces dernières par une force de frottement fluide du type $\vec{f}_{\text{fluide}} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{i}$ (on travaille à une dimension), h étant une constante.

Les deux figures ci-dessous illustrent de façon qualitative la différence de comportement entre un système physique (masse+ressort) ou l'on ne tient pas comte des frottements et le même système lorsque ces dernières sont prises en compte.



Un oscillateur harmonique simple consistant d'une masse M et d'un ressort sans masse de constante de force C. Une plume attachée à M va tracer une courbe sinusoïdale sur une bande papier qui est déroulée à vitesse constante devant M.



Tous les oscillateurs harmoniques réels sont soumis à un amortissement dû aux forces de frottement, telles que la résistance de l'air. Un système masse-ressort avec un amortissement faible décrirait une courbe de ce genre sur une bande de papier qu'on déroule à vitesse uniforme, si on a démarré l'oscillation du système masse-ressort à $t = 0$.

L'équation du mouvement sur l'axe (Ox) devient (par application du principe fondamental de la dynamique) $m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}$.

Nous allons réécrire cette équation sous trois formes dites **canoniques** que l'on rencontre habituellement. En effet, l'équation canonique s'écrit de façon identique quel que soit le domaine physique auquel elle s'applique. De plus l'écriture sous forme canonique permet de faire apparaître des grandeurs physiques caractéristiques du problème étudié. On écrira donc :

$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, couple (ω_0, τ)	$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} =$ pulsation propre , $\tau \equiv \frac{m}{h} =$ temps de relaxation
$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, couple $(\omega_0, 2\alpha)$	$2\alpha \equiv \frac{1}{\tau} =$ facteur d'amortissement
$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, couple (ω_0, Q)	$Q \equiv \omega_0\tau =$ facteur de qualité (sans dimension)

2.2 Solution de l’équation différentielle (équation d’évolution)

Dans la suite de ce chapitre, nous allons écrire l’équation différentielle sous la forme canonique $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0{}^2x=0$ (3) que nous allons chercher à résoudre. Il s’agit d’une équation différentielle de second ordre à coefficients constants. Avant toutes choses, lorsque $Q\to\infty$, on retrouve l’équation (1). **C’est toujours le terme devant $\dot{x}$ qui traduit l’amortissement**.

On cherche une solution de la forme e^{rt} que l’on réinjecte dans l’équation (3). On arrive à **l’équation caractéristique** de la forme $r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0{}^2=0$. Il s’agit à présent d’une équation algébrique. Dans le cas général, r admet deux solutions r_1 et r_2 qui sont complexes ou réelles, ce qui donne:

$$x(t)=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t},$$

où A_1 et A_1 sont des constantes (complexes conjuguées car $x(t)$ doit être réelle) que l’on détermine à partir des conditions initiales du problème.

2.3 Régime d’évolution

La nature physique d’évolution de $x(t)$ va dépendre du facteur de qualité Q donc de l’amortissement du système. En effet selon la valeur de Q, le nature des racines r_1 et r_2 sera différente.

a) Régime ***pseudo périodique*** : $\boxed{Q>\frac{1}{2}}$

Si $Q>\frac{1}{2}$ alors $\alpha<\omega_0$. Soit Δ le discriminant de l’équation caractéristique :

$\Delta=\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2-4\omega_0{}^2=\omega_0{}^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)<0$. On pose $\omega^2\equiv\omega_0{}^2-\alpha^2$ avec ω la **pseudo-pulsation.**

$$\Delta=\omega_0{}^2\left(\frac{4\alpha^2}{\omega_0{}^2}-4\right)=4\left(\alpha^2-\omega_0{}^2\right)=-4\omega^2<0$$

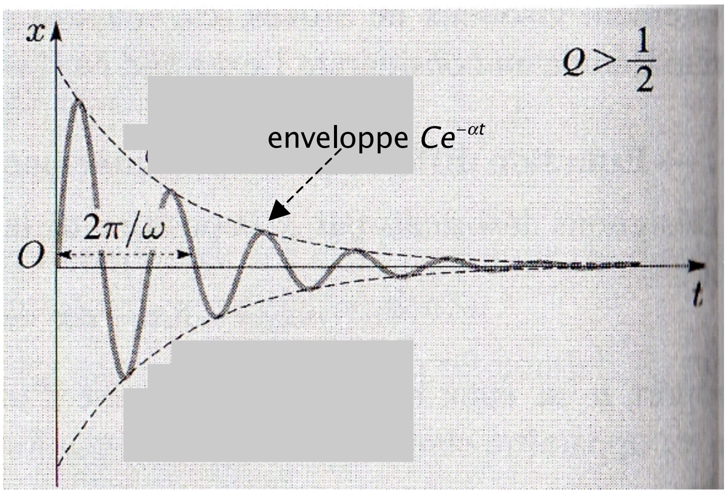
On obtient : $\begin{cases} r_1=\dfrac{-\frac{\omega_0}{Q}-j2\omega}{2}=-\alpha-j\omega \\ r_2=-\alpha+j\omega \end{cases}$ et finalement :

$$x(t)=e^{-\alpha t}\left(A_1e^{-j\omega t}+A_2e^{j\omega t}\right).$$

On sait que $\cos(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ et $\sin(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$ ce qui permet de réécrire la solution sous les formes équivalentes suivantes :

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\substack{\text{décroissante exponentielle de} \\ \text{l'amplitude.} \\ \text{(l'energie du système décroit)}}} \underbrace{\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)}_{\text{facteur oscillant à la pseudo-pulsation } \omega} = C\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

A, B, C et φ sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (position initiale x_0 et vitesse initiale v_0).



Le système oscille, mais sans être périodique à cause de l'amortissement, jusqu'à son retour à la position d'équilibre ($x = 0$). On a un mouvement pseudo-périodique de pseudo-période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\alpha}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2Q}\right)^2}}}.$$

<u>a) Régime ***apériodique*** :</u> $\boxed{Q < \frac{1}{2}}$

Si $Q < \dfrac{1}{2}$ alors $\alpha > \omega_0$.

On pose $\omega^2 \equiv \alpha^2 - \omega_0^{\,2}$ avec ω la **pseudo-pulsation.**

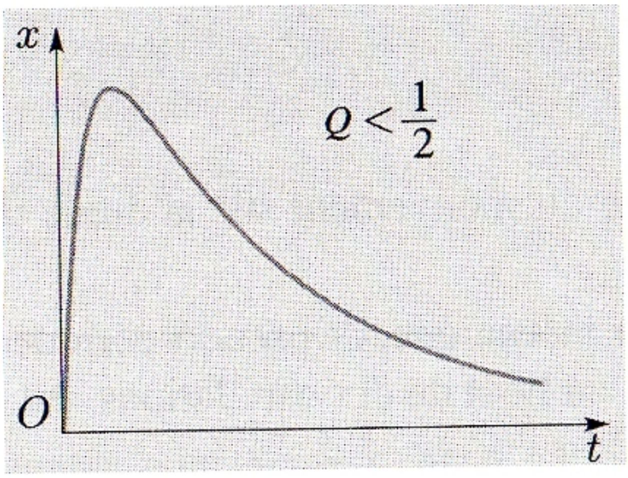
$\Delta = 4\omega^2 > 0$

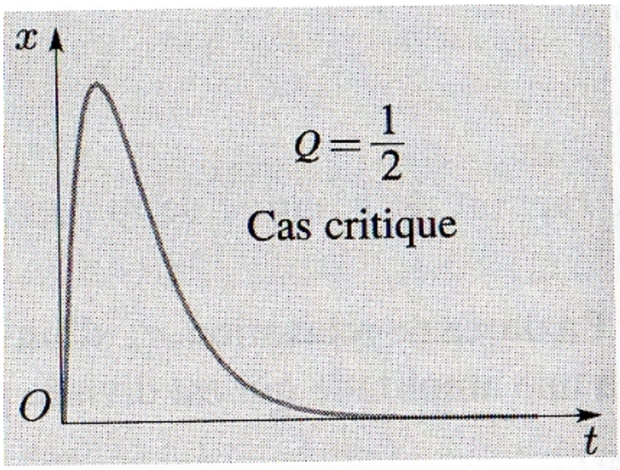
On obtient : $\begin{cases} r_1 = -\alpha - \omega \\ r_2 = -\alpha + \omega \end{cases}$ et finalement :

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t}\underbrace{\left(A_1 e^{-\omega t} + A_2 e^{\omega t}\right)}_{\text{termes purement exponentiels}}}$$

A_1 et A_2 sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (position initiale x_0 et vitesse initiale v_0).

Le retour à l'équilibre du système se fait sans osciller car l'amortissement est devenu trop important.





<u>a) Régime ***critique***:</u> $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$

Si $Q = \frac{1}{2}$ alors $\alpha = \omega_0$. $\Delta = 4\left(\alpha^2 - \omega_0{}^2\right) = 0$. On peut écrire $\ddot{x} + 2\omega_0 \dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$ soit $\frac{d^2}{dt^2}\left(x(t)e^{\omega_0 t}\right) = 0$. $x(t)e^{\omega_0 t}$ est donc une fonction affine du temps $x(t)e^{\omega_0 t} = a + bt$ ce qui donne :

$$x(t) = \left(a + bt\right)e^{-\omega_0 t}$$

a et b sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (position initiale x_0 et vitesse initiale v_0).

Le retour à l'équilibre du système se fait là encore sans osciller car l'amortissement est devenu trop important. Il s'agit du cas où **le retour à l'équilibre est le plus rapide**.

III – Etude énergétique de l'oscillateur amorti

<u>3.1 Puissance des forces de frottement</u>

On repart de l'équation différentielle du mouvement sous sa forme initiale: $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0$.

On multiplie par $v = \dot{x}$, ce qui donne après réarrangement : $\frac{d}{dt}\underbrace{\left[\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right]}_{\text{Energie mécanique}} = -hv^2$.

On reconnaît entre crochets l'expression de l'énergie mécanique et globalement le théorème de l'énergie mécanique :

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = \underbrace{-hv^2 = f_{\text{fluide}}\, v}_{\text{puissance des forces non-conservatives}} < 0}.$$

L'énergie mécanique décroît au cours du temps à cause de la puissance de la force de frottement fluide qui est négative. Nous verrons en thermodynamique ce qu'il advient de l'énergie qui disparaît.

3.2 Régime pseudo-périodique

Notre objectif dans cette partie est de donner une signification physique concrète du facteur de qualité. Nous allons nous placer en régime pseudo-périodique.

On a $C\,e^{-\alpha t}\cos\left(\omega t+\varphi\right)$. Entre deux élongations, espacées d'une demi pseudo-période $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $\frac{x\left(t+T\right)}{x\left(t\right)}=e^{-\alpha T}=e^{-\delta}$. δ est appelé **décrément logarithmique**. C'est une grandeur expérimentale qui caractérise les pseudo-oscillations, $\delta=\alpha T=\frac{\omega_0 T}{2Q}$. Pour $Q>\frac{1}{2}\left(\alpha<\omega_0\right)$, on obtient :

$$\boxed{\delta \equiv \ln\frac{x\left(t\right)}{x\left(t+T\right)}=\alpha T=\frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega_0^{\ 2}-\alpha^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{Q^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}}$$

Ainsi la mesure expérimentale de δ, permet d'accéder au facteur de qualité du système étudié.

On regarde à présent la décroissance de l'énergie mécanique du système entre deux élongations maximales pour lesquelles la vitesse s'annule, $x\left(t_0\right)$ et $x\left(t_0+T\right)$.

Pour $x\left(t_0\right)\ \Rightarrow E_m=\frac{1}{2}k\,x^2(t_0)$. Pour $x\left(t_0+T\right), \Rightarrow E_m+\Delta E_m=\frac{1}{2}k\,x^2(t_0+T)$ avec $\Delta E_m<0$.

On peut écrire $\Rightarrow E_m+\Delta E_m=\underbrace{\frac{1}{2}k\,x^2\left(t_0\right)}_{E_m}\ \underbrace{\frac{x^2(t_0+T)}{x^2\left(t_0\right)}}_{e^{-2\delta}}$ soit encore $\frac{\Delta E_m}{E_m}=\left(e^{-2\delta}-1\right)<0$.

Si le système est faiblement amorti, on peut dire que $\delta<<1$ ou $Q>>1$. Dans ce cas $\delta\approx\frac{\pi}{Q}$ car $T\approx T_0$. Ainsi $\frac{\Delta E_m}{E_m}=\underbrace{-2\delta}_{\substack{\text{car } e^{-2\delta}-1\approx 1-2\delta-1 \\ \text{si } -2\delta<<1}}=-\frac{2\pi}{Q}$ et finalement :

$$\boxed{Q=\left|2\pi\frac{E_m}{\Delta E_m}\right|}$$

On peut dire que le facteur de qualité **Q représente la perte d'énergie relative du système par pseudo-période**. Plus le facteur de qualité est grand, moins le système perd de l'énergie (moins il est amorti) et inversement.