

RECAPITULATIFS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET DE LEURS SOLUTIONS

RENCONTREES DANS LE COURS DE PHYSIQUE-CHIMIE

(Le paramètre qui évolue dans le temps est noté x)

Equations différentielles	Exemples (non exhaustifs)	Solutions
Ordre 1 $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = a$ $x(0) = x_0$	<ul style="list-style-type: none"> Vitesse d'un projectile soumis à son poids et à des frottements fluides. Tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC soumis à un échelon de tension. Concentration d'un réactif dans une réaction d'ordre 1. 	$x(t) = \underbrace{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}_{\substack{\text{solution générale} \\ \text{sans second membre} \\ = \text{solution du régime transitoire}}} + \underbrace{\tau a}_{\substack{\text{solution particulière} \\ \text{avec second membre} \\ = \text{solution du régime permanent}}}$ $\tau a = x(\infty)$ $A = x_0 - \tau a$
Ordre 2 (sans terme dissipatif) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = v_0$	<ul style="list-style-type: none"> Angle d'un pendule simple non amorti pour des petites oscillations. Intensité dans un circuit LC sans résistance. Position d'une masse accrochée à un ressort non amorti pour des petites oscillations. 	$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$ $\tan \varphi = -v_0 / \omega_0 x_0$
Ordre 2 (avec terme dissipatif) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a$ $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = v_0$	<ul style="list-style-type: none"> Angle d'un pendule simple amorti pour des petites oscillations. Tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC soumis à un échelon de tension. Position d'une masse accrochée à un ressort amorti pour des petites oscillations. 	$x(t) = \underbrace{x_{tr}(t)}_{\substack{\text{solution générale} \\ \text{sans second membre} \\ = \text{solution du régime transitoire}}} + \underbrace{a/\omega_0^2}_{\substack{\text{solution particulière} \\ \text{avec second membre} \\ = \text{solution du régime permanent}}}$ $a/\omega_0^2 = x(\infty)$ <ul style="list-style-type: none"> Si $Q > 1/2$: <u>régime pseudopériodique</u> $x_{tr}(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$ avec $2\alpha = \omega_0/Q$ et $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$ A et φ déterminées à partir des conditions initiales Si $Q < 1/2$: <u>régime apériodique</u> $x_{tr}(t) = e^{-\alpha t} (A e^{-\omega t} + B e^{\omega t})$ avec $2\alpha = \omega_0/Q$ et $\omega^2 = \alpha^2 - \omega_0^2$ A et B déterminées à partir des conditions initiales Si $Q = 1/2$: <u>régime critique</u> $x_{tr}(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t}$ A et B déterminées à partir des conditions initiales
Ordre 2 (régime sinusoïdal forcé) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a \cos(\omega_1 t)$ $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = v_0$	<ul style="list-style-type: none"> Intensité dans un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé. Position d'une masse accrochée à un ressort amorti en régime sinusoïdal forcé pour des petites oscillations. 	$x(t) = \underbrace{x_{tr}(t)}_{\substack{\text{solution générale} \\ \text{sans second membre} \\ = \text{solution du régime transitoire}}} + \underbrace{x_{per}(t)}_{\substack{\text{solution particulière} \\ \text{avec second membre} \\ = \text{solution du régime permanent}}}$ $x_{tr}(t) \text{ idem cas précédent suivant les valeurs de } Q$ $x_{per}(t) = X_m \cos(\omega_1 t + \varphi)$ $X_m^2 = \frac{a^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega_1^2}{Q^2}} \text{ et } \varphi = \arctan\left(\frac{\omega_0 \omega_1}{Q(\omega_0^2 - \omega_1^2)}\right)$ <p>Contrairement à $x_{tr}(t)$, $x_{per}(t)$ ne dépend pas des conditions initiales.</p>