CIRCUITS LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAl FORCE
CIRCUIT RLC ET RESONANCE

Nous allons étudier la réponse des circuits soumis à un signal $\left(i(t) \text{ ou } u(t)\right)$ de **forme sinusoïdale**, on parle de signaux alternatifs (AC). Ces signaux jouent un rôle très important dans les sciences physiques:

• Ils sont présents dans de nombreux domaines (oscillations mécaniques, physiques des ondes, optique, physique quantique, électricité…)

• Ils sont faciles à générer. EDF transport l'énergie électrique sous formes de signaux sinusoïdaux. Dans les télécoms, les informations sont transportées par des ondes électromagnétiques de forme sinusoïdale (ou plutôt par une somme d'ondes sinusoïdales).

• On montre en mathématiques (analyse de Fourier) que tout signal périodique peut s'écrire comme une somme infinie de fonctions sinusoïdales d'ou le rôle universel joué par ces dernières. De plus, elles sont faciles à manipuler (dériver, intégrer…).

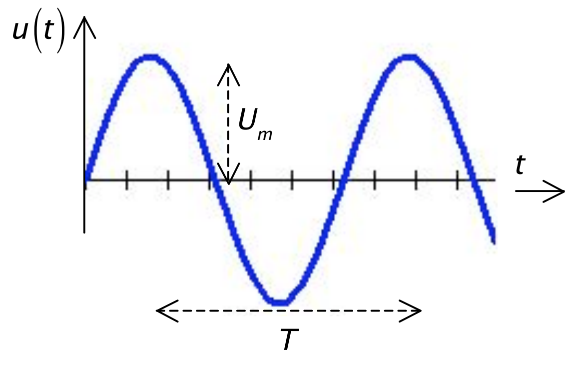
I – Signal sinusoïdal

Nous allons travailler sur l'exemple de $u(t)$, nous pourrions faire la même chose avec $i(t)$. Un signal sinusoïdal s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

$U_m \equiv$ amplitude (en V), $\omega \equiv$ pulsation (en rad.s^{-1}), $\varphi \equiv$ phase à l'origine (sans unité). La période T (en s) de ce signal et la fréquence f (en Hz) sont reliées à la pulsation par :

$$\boxed{T \equiv \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}}$$

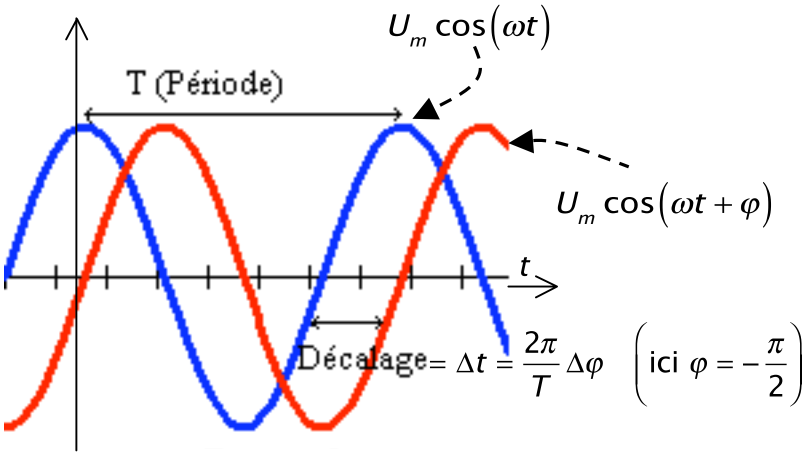


Dans ce cours, nous travaillons avec la fonction cosinus mais nous pouvons utiliser, de façon équivalente, la fonction sinus. La différence entre les deux fonctions correspond simplement à un déphasage de $\pi/2$.

- Périodicité : $u(t+T)=u(t)$

$u(t+T)=U_m\cos(\omega(t+T)+\varphi)=U_m\cos(\omega t+\omega T+\varphi)=U_m\cos(\omega t+2\pi+\varphi)=U_m\cos(\omega t+\varphi)=u(t)$ car la fonction cosinus est périodique de période 2π.

- Déphasage entre deux signaux synchrones (de même pulsation)



Soit $u_1(t)=U_{m1}\cos(\omega t+\varphi_1)$ et $u_2(t)=U_{m2}\cos(\omega t+\varphi_2)$ deux signaux synchrones. u_1 et u_2 sont maximales quand $\omega t_1+\varphi_1=\omega t_2+\varphi_2=0$ soit $\Delta t\equiv t_2-t_1=\frac{1}{\omega}\left(\underbrace{\varphi_1-\varphi_2}_{\equiv\Delta\varphi}\right)$. On retiendra le résultat pratique suivant :

$$\boxed{\Delta\varphi=\frac{2\pi}{T}\Delta t}$$

- Rappels de trigonométrie

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$$
$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$$
$$\sin(\omega t\pm\pi)=-\sin\omega t$$
$$\cos(\omega t\pm\pi)=-\cos\omega t$$

$$\sin\left(\omega t\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm\cos\omega t$$
$$\cos\left(\omega t\pm\frac{\pi}{2}\right)=\mp\sin\omega t$$

II – Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

Il s'agit d'un outil mathématique très puissance dans notre étude des circuits électriques.

2.1 Rappels sur les nombres complexes

En sciences physiques, il est d'usage d'écrire $\boxed{j^2=-1}$ car la lettre i est déjà utilisée pour désigner l'intensité du courant électrique.

Soit z un nombre complexe, on peut l'écrire sous trois formes équivalentes :

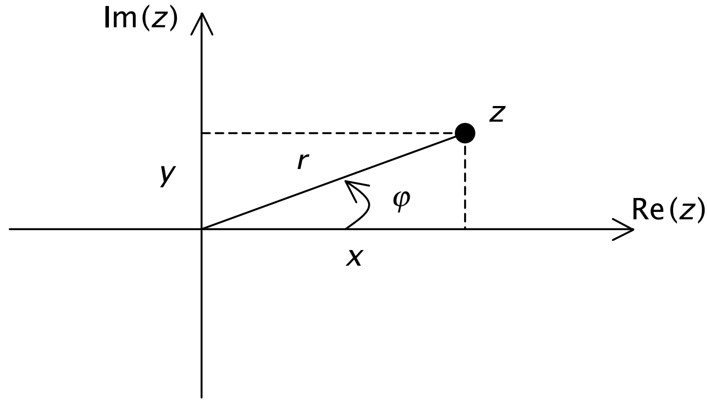
$$\begin{cases} \text{forme } \textbf{rectangulaire} : z = x + jy \\ \text{forme } \textbf{polaire} : z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \\ \text{forme } \textbf{exponentiel} : z = re^{j\varphi} \end{cases}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (le module)

$\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$ (la phase ou argument)

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$



- Si $z = z_1 z_2$ alors $z = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- Si $z = z_1 / z_2$ alors $z = \dfrac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- $\bar{z} = r\,e^{-j\varphi} = x - jy$
- Si $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

2.2 Représentation complexe d'une tension (d'une intensité) périodique

Soit $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. On peut écrire que $u(t) = \mathrm{Re}\left(U_m e^{j(\omega t + \varphi)}\right)$. Nous allons associer à la tension $u(t)$ un nombre complexe $\underline{U}$ appelé **amplitude complexe** (phasor en anglais) défini par :

Définition de l'amplitude complexe: $\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$

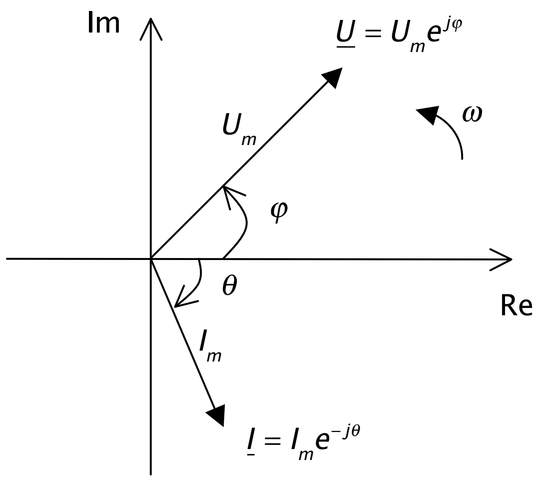
$$\underbrace{u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{REPRESENTATION TEMPORELLE}} \Leftrightarrow \underbrace{\underline{U} = U_m e^{j\varphi}}_{\text{REPRESENTATION COMPLEXE}}$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{U}\,e^{j\omega t}\right)$$

Nous verrons que dans un circuit en régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs électriques oscillent à la même pulsation ω en régime permanent. Par contre **l'amplitude** et la **phase** seront propres à chaque grandeur, c'est pourquoi la grandeur pertinente à étudier est **l'amplitude complexe** $U_m e^{j\varphi}$. Notre travail principal sera la détermination de l'amplitude U_m et de la phase φ.

L'amplitude complexe a donc une amplitude (une norme) et une phase (direction), elle se comporte comme un vecteur.



On peut donc représenter une amplitude complexe par un vecteur dans un **diagramme dit de Fresnel** (figure ci-dessus). Sur ce dernier, l'amplitude complexe $\underline{U}$ est une « photo » à l'instant $t=0$ du nombre complexe $\underline{U}e^{j\omega t}$, dont la partie réelle correspond à $u(t)$. Ainsi, dans le plan complexe, $\underline{U}e^{j\omega t}$ a un mouvement de rotation à la vitesse angulaire ω dans le sens trigonométrique.

2.3 Dérivation et intégration dans le domaine complexe

a) dérivation

$$\frac{du(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(U_m\cos(\omega t+\varphi)\right)=-\omega U_m\sin(\omega t+\varphi)=\omega U_m\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{Re}\left(\omega U_m e^{j\omega t}e^{j\varphi}e^{j\frac{\pi}{2}}\right).$$

Comme $e^{j\frac{\pi}{2}}=j$, $\frac{du(t)}{dt}=\mathrm{Re}\left(j\omega\underline{U}e^{j\omega t}\right)$. L'amplitude complexe associée à $\frac{du(t)}{dt}$ correspond à $j\omega\underline{U}$.

b) Intégration

$$\int u(t)dt=\frac{U_m}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)=\frac{U_m}{\omega}\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{U_m}{\omega}e^{j\omega t}e^{j\varphi}e^{-j\frac{\pi}{2}}\right).$$

Comme $e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j$, $\int u(t)dt=\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{U}}{j\omega}e^{j\omega t}\right)$. L'amplitude complexe associée à $\int u(t)dt$ correspond à $\frac{\underline{U}}{j\omega}$.

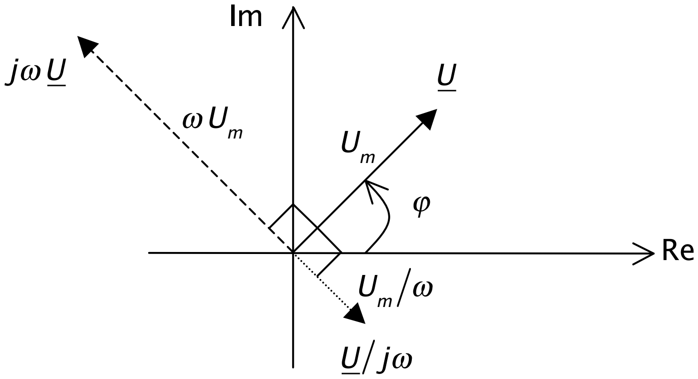
c) Conclusion

$$\underbrace{\frac{du(t)}{dt}}_{\text{REPRESENTATION TEMPORELLE}}\Leftrightarrow\underbrace{j\omega\underline{U}}_{\text{REPRESENTATION COMPLEXE}}$$

$$\underbrace{\int u(t)dt}_{\text{REPRESENTATION TEMPORELLE}}\Leftrightarrow\underbrace{\frac{\underline{U}}{j\omega}}_{\text{REPRESENTATION COMPLEXE}}$$

Dans le domaine complexe, les opérations dérivations et intégrations sont beaucoup plus simples, ils suffit respectivement de **multiplier** par $j\omega$ et de **diviser** par $j\omega$ l'amplitude complexe.

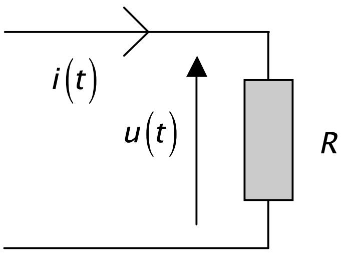
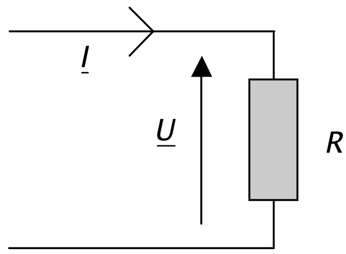
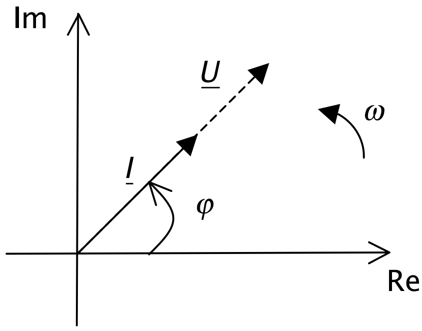
Sur le diagramme de Fresnel ci-dessous on a représenté les amplitudes complexes $\underline{U}$, $j\omega\underline{U}$ et $\frac{\underline{U}}{j\omega}$. $j\omega\underline{U}$ est **avance** de $\pi/2$ sur $\underline{U}$. $\underline{U}/j\omega$ est en **retard** de $\pi/2$ sur $\underline{U}$.



III – Loi d'Ohm en notation complexe, admittance et impédance

On travaille dans ce paragraphe en convention récepteur.

3.1 Résistance

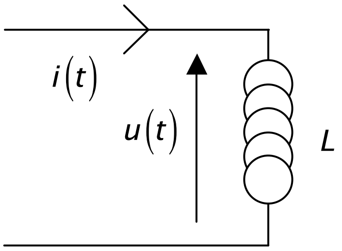
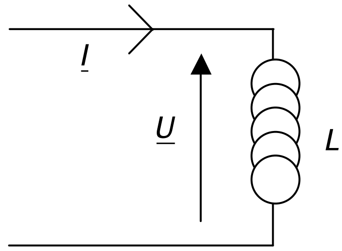
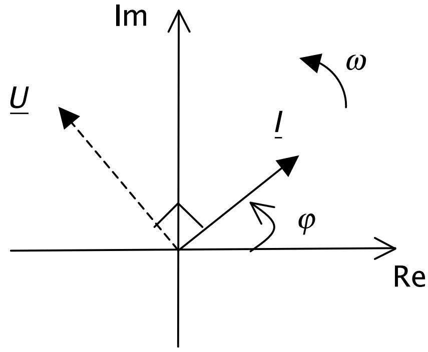
 Représentation temporelle : $u(t) = R\,i(t)$	 Représentation complexe : $\boxed{\underline{U} = R\,\underline{I}}$	 Diagramme de Fresnel

$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{I} = I_m e^{j\varphi}$

$u(t) = R\,I_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{U} = R\,I_m e^{j\varphi}$

$u(t)$ et $i(t)$ sont en phases.

3.2 Bobine

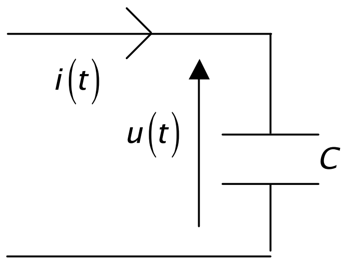
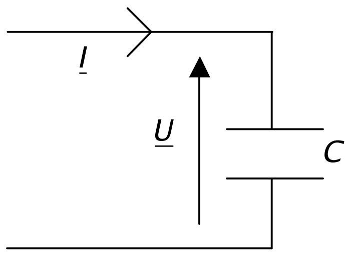
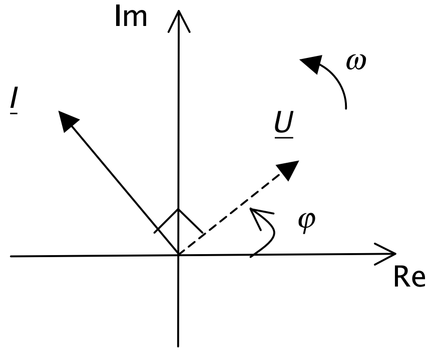
 Représentation temporelle : $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	 Représentation complexe : $\boxed{\underline{U} = jL\omega\,\underline{I}}$	 Diagramme de Fresnel

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{I} = I_m e^{j\varphi}$$

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -L\,I_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = L\,I_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \underline{U} = \omega L\,I_m e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = jL\omega\,\underline{I}$$

$\boxed{u(t) \text{ est en avance de } \pi/2 \text{ sur } i(t).}$

3.3 Condensateur

 Représentation temporelle : $i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$	 Représentation complexe : $\boxed{\underline{U} = \dfrac{\underline{I}}{jC\omega}}$	 Diagramme de Fresnel

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{U} = U_m e^{j\varphi}$$

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = -C\,U_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = C\,U_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \underline{I} = \omega\,C\,U_m e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = jC\omega\,\underline{U}$$

$\boxed{u(t) \text{ est en retard de } \pi/2 \text{ sur } i(t).}$

Nous pouvons résumer les résultats importants obtenus ci-dessus dans le tableau suivant.

Elément	Représentation temporelle	Représentation complexe
R	$u = R\,i$	$\underline{U} = R\,\underline{I}$
L	$u = L\dfrac{di}{dt}$	$\underline{U} = jL\omega\,\underline{I}$
C	$i = C\dfrac{du}{dt}$	$\underline{U} = \dfrac{\underline{I}}{jC\omega}$

3.4 Impédance et admittance complexe

D'après les paragraphes précédents, nous constatons, qu'en représentation complexe, $\underline{U}$ et $\underline{I}$ sont proportionnelles. Par généralisation de la loi d'Ohm, on définit pour un dipôle quelconque **l'impédance et l'admittance complexe** (on dira simplement impédance et admittance) :

Impédance complexe: $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ ou $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$

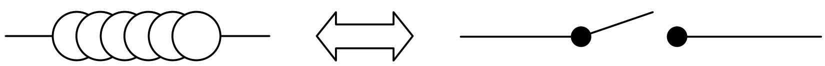
Admittance complexe: $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$

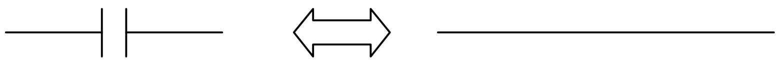
Pour les trois dipôles fondamentaux, nous avons les impédances et les admittances suivantes :

Elément	Impédance	Admittance
R	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Y}_R = \dfrac{1}{R}$
L	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Y}_L = \dfrac{1}{jL\omega}$
C	$\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega}$	$\underline{Y}_C = jC\omega$

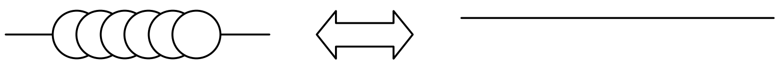
On remarque que :

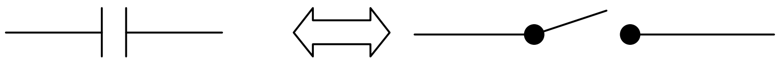
- $\omega \to \infty$ (haute fréquence)

$\left|\underline{Z}_L\right| \to \infty$  circuit ouvert

$\left|\underline{Z}_C\right| \to 0$  court circuit

- $\omega \to 0$ (base fréquence)

$\left|\underline{Z}_L\right| \to 0$  court circuit

$\left|\underline{Z}_C\right| \to \infty$  circuit ouvert

Pour un dipôle résultant d'une association quelconque de résistances, de bobines et de condensateur, on peut définir une impédance (et admittance) (nombres complexes) que l'on écrira sous la forme :

$$\underline{Z} = R + j\,X = \left|\underline{Z}\right| e^{j\theta}$$
$$R = \mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right) = \textbf{résistance}$$
$$X = \mathrm{Im}\left(\underline{Z}\right) = \textbf{réactance}$$
$$\left|\underline{Z}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ et } \tan\theta = X/R$$

On peut écrire de la même façon l'admittance sous la forme $\underline{Y} = G + j\,B$ mais nous l'utilisera peu.

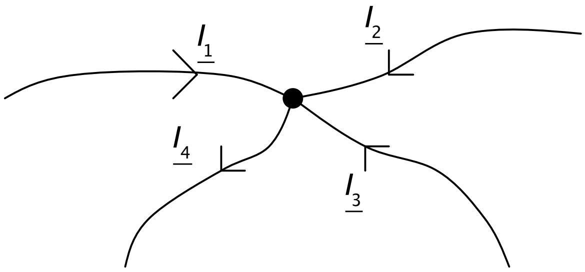
IV – Théorème généraux en représentation complexe

Les théorèmes généraux que nous avons rencontrés pour des régimes temporels quelconques se généralisent immédiatement en régime sinusoïdal forcé.

4.1 Loi des nœuds de Kirchhoff

$$\sum_n \varepsilon_n \underline{I_n} = 0 \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_n = +1 \text{ si } \underline{I_n} \text{ arrive au noeud} \\ \varepsilon_n = -1 \text{ si } \underline{I_n} \text{ repart du noeud} \end{cases}$$

Dans l'exemple suivant : $\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} - \underline{I_4} = 0$.



En effet si $i_1 = I_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \ldots$,

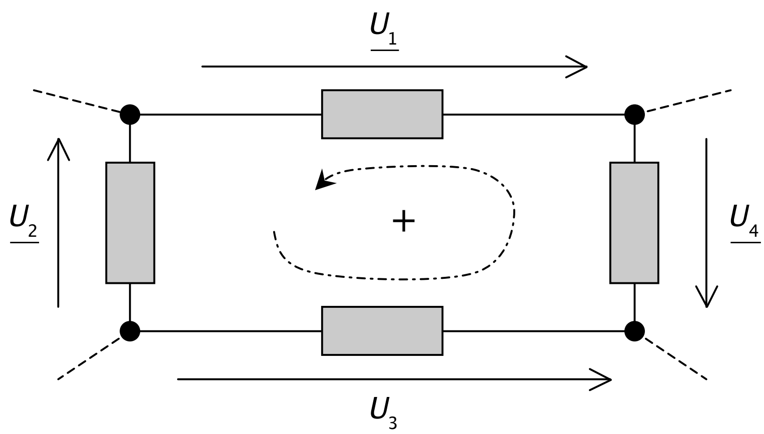
$$I_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \ldots - I_{m4} \cos(\omega t + \varphi_4) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(I_{m1} e^{j(\omega t + \varphi_1)} \ldots - I_{m4} e^{j(\omega t + \varphi_4)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\left[\underline{I_1} \ldots - \underline{I_4}\right] e^{j\omega t}\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{I_1} \ldots - \underline{I_4} = 0.$$

4.2 Loi des mailles de Kirchhoff

$$\sum_n \varepsilon_n \underline{U_n} = 0 \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_n = +1 \text{ si } \underline{U_n} \text{ orienté dans le sens de la maille} \\ \varepsilon_n = -1 \text{ si } \underline{U_n} \text{ orienté dans le sens contraire de la maille} \end{cases}$$

Dans l'exemple suivant : $-\underline{U_1} - \underline{U_2} - \underline{U_4} + \underline{U_3} = 0$.



La démonstration est analogue à celle sur la loi des nœuds.