Electrostatique série 2 : Théorème de Gauss et potentiel électrostatique

Exercice 1 : Cylindre infini ◆◆

Soit un cylindre infini d'axe noté (Oz), de rayon R et de densité volumique de charge uniforme ρ.

a) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ en fonction de la distance r par rapport à l'axe du cylindre, aussi bien à l'intérieur du cylindre qu'à l'extérieur du cylindre.
Pour ce faire, on suivra les étapes suivantes :

- Utilisation des propriétés de symétrie de la distribution de charge pour trouver la direction du vecteur $\vec{E}$ et de quelles variables il dépend.
- Choix de la surface de Gauss qui possède les mêmes propriétés de symétrie que la distribution de charges.
- Application du théorème de Gauss pour $r < R$ et $r > R$.

On tracera sur un graphe E en fonction de r.

b) A partir de la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$, déterminer $V(r)$ pour $r < R$ et $r > R$. On tracera sur un graphe V en fonction de r. En coordonnées cylindriques, on a : $\overrightarrow{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$. Il faut penser à utiliser la continuité de V en $r = R$. On prendra comme constante d'intégration une valeur arbitraire V_0.

Exercice 2 : Sphère creuse de charge surfacique uniforme ◆◆

On considère une sphère creuse de centre O, de rayon R, portant la charge surfacique uniforme σ. Sa charge est notée $q = 4\pi R^2\sigma$.

En suivant la démarche précédente, déterminer $\vec{E}$ et V pour $r < R$ et $r > R$.

En coordonnées sphériques, on a : $\overrightarrow{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$ avec θ et φ des physiciens.

<u>Attention :</u> $\vec{E}$ est discontinu à la traversée de la surface alors que V est continu.

Exercice 3 : Champ électrostatique à l'intérieur de l'atome d'hydrogène ◆◆◆◆

Un atome d'hydrogène est constitué d'un proton de charge $+q = 1{,}6\times10^{-19}$ C et d'un électron de charge $-q = -1{,}6\times10^{-19}$ C. Le proton peut-être considéré comme un point ponctuel fixe en $r = 0$, le centre de l'atome.
Le mouvement de l'électron autour du noyau à pour conséquence que sa charge peut-être considérée comme répartie autour du proton avec une distribution sphérique de charge de la forme $\rho(r) = -\frac{q}{\pi a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}$. $a_0 = 5{,}29\times10^{-11}$ m est appelé le rayon de Bohr.

a) Trouver la charge totale de l'atome d'hydrogène qui est comprise dans une sphère de rayon r centré sur l'atome d'hydrogène. Que se passe-t-il quand $r \to \infty$, expliquer ce résultat.

b) Trouver le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par l'atome d'hydrogène en fonction de r (utiliser le théorème de Gauss). Tracer sur un graphe E en fonction de r.