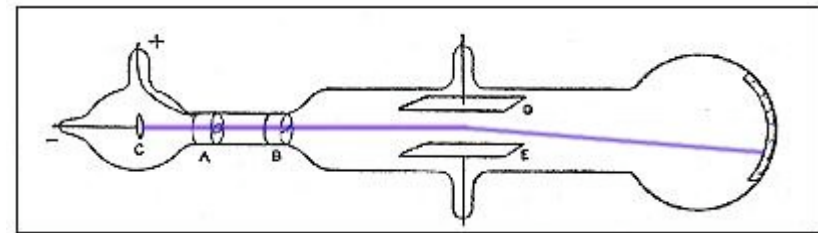
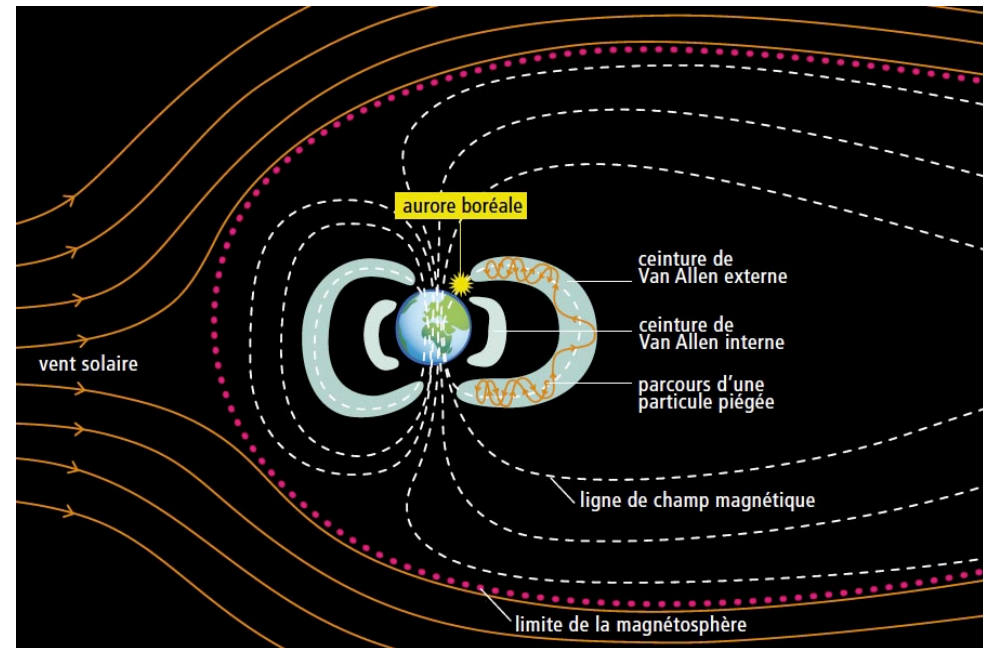
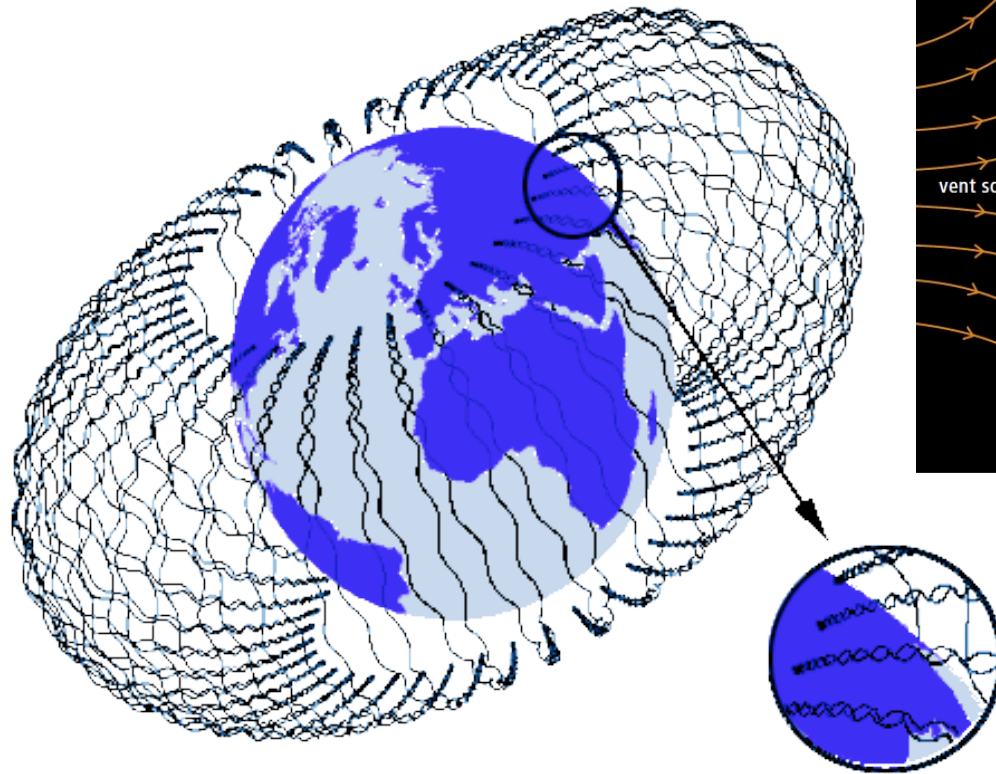


Mouvement de particules chargées dans les champs électrique et magnétique



1-Force de Lorentz

1-1 Formulation

Soit une particule de charge q , de masse m , animée d'une vitesse $\vec{v}(M,t)$, dans un référentiel galiléen \mathfrak{R} , en présence d'un champ électrique $\vec{E}(M,t)$ et d'un champ magnétique $\vec{B}(M,t)$. Elle est soumise à la **force de Lorentz**:

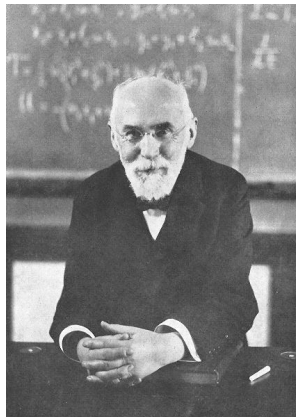
$$\vec{F} = q \left[\vec{E}(M,t) + \vec{v}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t) \right]$$

Pour des champs **uniformes** et **indépendants du temps** (notre programme):

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right]$$

Remarques:

- Les expressions de \vec{F} , q et m ne dépendent pas du référentiel \mathfrak{R} de travail
- Les expressions de \vec{E} , \vec{B} et \vec{v} dépendent du référentiel \mathfrak{R} de travail
- E/B est homogène à une vitesse



Hendrik Antoon Lorentz (né le 18 juillet 1853 à Arnhem, Pays-Bas ; mort le 4 février 1928 à Haarlem, Pays-Bas) est un physicien qui reçut en 1902 le prix Nobel de physique et en 1908 la Médaille Rumford. Il fut lauréat de la Médaille Franklin en 1917 pour ses travaux sur la nature de la lumière et la constitution de la matière. Il reçut également la médaille Copley en 1918. La majorité de ses travaux portèrent sur l'électromagnétisme. Il a laissé son nom aux transformations de Lorentz qui sont à la base de la théorie de la relativité restreinte.

1-Force de Lorentz

1-2 Puissance de la force de Lorentz

• $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} + \underbrace{q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{=0 \text{ car } \vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}} \Rightarrow \boxed{P = q\vec{E} \cdot \vec{v}}$ La force électrique travail, la force magnétique ne travail pas

→ **La force électrique :**

- permet d'accélérer ou de décélérer une particule, c'est à dire de modifier $\|\vec{v}\|$
- permet de modifier la trajectoire de la particule, c'est-à-dire de modifier la direction de \vec{v}

→ **La force magnétique :**

- ne permet pas d'accélérer ou de décélérer une particule
- permet de modifier la trajectoire d'une particule en modifiant la direction de \vec{v} (mais pas sa norme)

• **Si \vec{E} seul**

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \text{ et } \vec{F}_E = q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(qV) = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p \Rightarrow \boxed{E_p = qV}$$

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{constante}} \quad (\vec{F}_E = q\vec{E} \text{ et une force conservative})$$

• **Si \vec{B} seul**

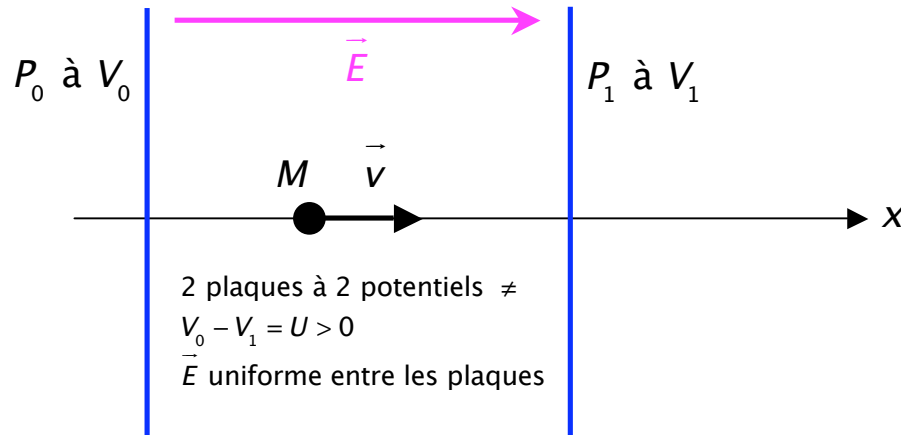
$$P = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

Théorème de la puissance cinétique: $\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = P = 0 \Rightarrow \boxed{\|\vec{v}\| = v = \text{constante}}$

2-Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et indépendant du temps

2-1 Rôle accélérateur

cas étudié: $\vec{E} \parallel \vec{v}_0$



$$x(t) = \frac{q}{2m} E t^2 + v_0 t \quad (qE > 0) \quad \text{Mouvement rectiligne uniformément accéléré}$$

• Conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + q V_0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + q V_1 \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 + \frac{2q}{m} U$$

$v_1 > v_0$ car $U = V_0 - V_1 > 0$ et $q > 0$

Soit un proton $m = 1,7 \times 10^{-27}$ kg et $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C
 A $t = 0$, le proton est en O avec $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$
 \vec{v}_1 quand proton en P_1 ?

• Application de la 2ème loi de Newton

$$m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} t + \vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{q}{2m} \vec{E} t^2 + \vec{v}_0 t + \underbrace{\vec{r}_0}_0$$

• Limite relativiste Si $v_0 = 0$, $v = \frac{q}{m} E t \Rightarrow v(t = \infty) = \infty$!!!

Calcul classique valable si $v/c \ll 1$

On se fixe comme critère $v/c < 0,1$

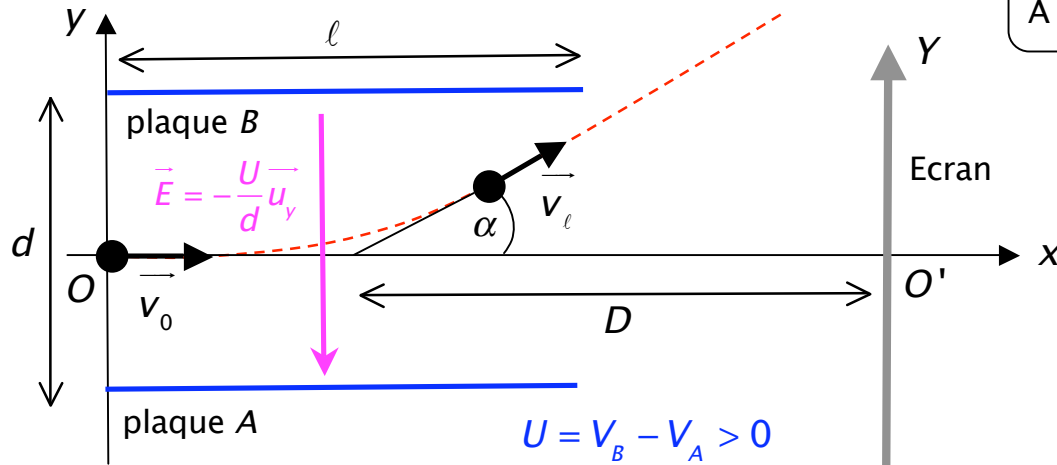
$$v = \sqrt{\frac{2q}{m} U} < 0,1c \Rightarrow U < 0,01 \frac{m c^2}{2q}$$

→ Proton $m = 1,7 \times 10^{-27}$ kg $U < 4,7 \times 10^6$ V

→ Electron $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg $|U| < 2500$ V

2-Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et indépendant du temps

2-2 Déflexion électrostatique cas étudié: $\vec{E} \perp \vec{v}_0$



Soit un électron $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg et $-q = -1,6 \times 10^{-19}$ C
 A $t = 0$, l'électron est en O avec $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$

pour $0 < x < \ell \Rightarrow$ mouvement parabolique
 pour $x > \ell \Rightarrow$ mouvement rectiligne uniforme car on néglige le poids

• Calcul de la déflexion

On cherche l'équation de la tangente en ℓ
 à la courbe parabolique:

$$y = ax + b, \quad a = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=\ell} = \frac{q}{mv_0^2} \frac{U}{d} \ell, \quad y(x = \ell) = \frac{q}{2mv_0^2} \frac{U}{d} \ell^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{mv_0^2} \frac{U}{d} \ell \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \quad (y = 0, x = \ell/2)$$

$$\tan \alpha = \frac{Y}{D} = \frac{q}{mv_0^2} \frac{U}{d} \ell \Rightarrow Y = \frac{q}{mv_0^2} \frac{U}{d} \ell D$$

• Application de la 2ème loi de Newton

$$m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -q\vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{sur (Ox)} \quad \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad v_x = v_0 \quad x = v_0 t$$

$$\Rightarrow \text{sur (Oy)} \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{qE}{m} \quad v_y = \frac{qE}{m} t \quad y = \frac{qE}{2m} t^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{2mv_0^2} \frac{U}{d} x^2 \quad \text{valable pour } 0 < x < \ell$$

• Application

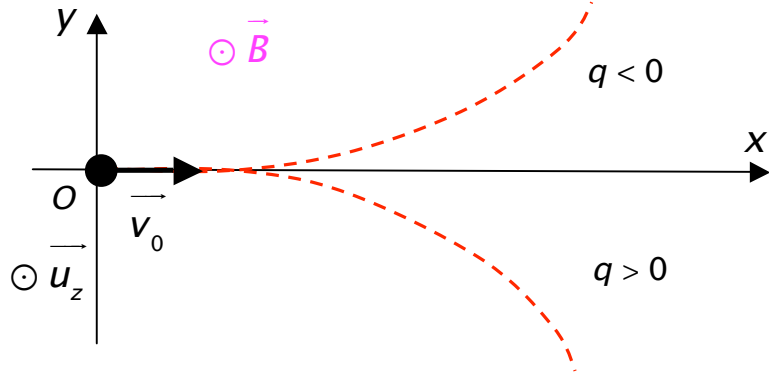
\Rightarrow Si U et v_0 sont fixé, Y dépend du rapport q/m .

On peut trier les particules selon q/m ,
 principe du **spectrographe de masse**.

\Rightarrow La déflexion Y est proportionnelle à la tension U ,
 principe du **canon à électron** (tube cathodique, oscilloscope).

3-Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

3-1 Mouvement circulaire cas étudié: $\vec{B} \perp \vec{v}_0$



Soit une particule, masse m , charge q
 A $t = 0$, particule en O avec $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$

- Application de la 2ème loi de Newton: trajectoire plane

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qB}{m} \vec{v} \wedge \vec{u}_z$$

On pose par définition: $\omega \equiv \frac{qB}{m}$ homogène à une pulsation

Equation du mouvement à résoudre: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega \vec{v} \wedge \vec{u}_z$

Sur Ox: $\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y$ Sur Oy: $\frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x$ Sur Oz: $\frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow z = cste = 0 \forall t$

$\forall t$, la trajectoire de la particule est dans le plan $xOy \perp \vec{B}$ et (cf page 3) $\|\vec{v}\| = v = \text{constante}$

- Détermination complète de la nature de la trajectoire: méthode de la variable complexe

On introduit par définition: $Z \equiv x(t) + jy(t) \Rightarrow \dot{Z} \equiv v_x + jv_y \Rightarrow \frac{dZ}{dt} \equiv \omega v_y - j\omega v_x = -j\omega(v_x + jv_y) = -j\omega \dot{Z}$

On doit résoudre: $\frac{\dot{dZ}}{\dot{Z}} = -j\omega dt$

1ère intégration entre $t = 0$ et t : $\dot{Z}(t) = \dot{Z}(0)e^{-j\omega t} = v_0 e^{-j\omega t}$

2ème intégration entre $t = 0$ et t : $Z(t) = \frac{v_0}{-j\omega} e^{-j\omega t} + cste(\text{complexe})$

3-Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

2^{ème} intégration entre: $Z(t) = \frac{V_0}{-j\omega} e^{-j\omega t} + cste$, $Z(0) = 0$ donc $cste = \frac{V_0}{j\omega} \Rightarrow Z(t) = \frac{V_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t}) = -\frac{V_0}{\omega} [\sin \omega t + j(1 - \cos \omega t)]$

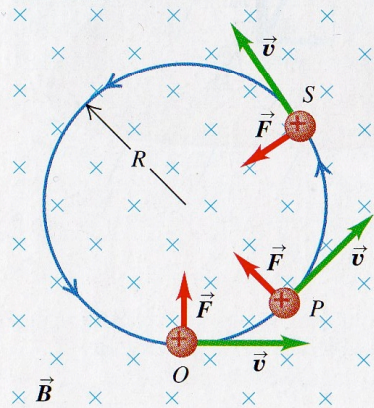
$$\left. \begin{aligned} x(t) &= -\frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) &= -\frac{V_0}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \end{aligned} \right\} \text{Equations paramétriques d'un cercle de rayon } R = \frac{V_0}{|\omega|} = \frac{mV_0}{|q|B} \text{ et de centre } C \left(0, -\frac{V_0}{\omega} \right)$$

Trajectoire circulaire uniforme à $\omega = \frac{|q|B}{m}$, période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{mV_0}{|q|}$

27.17 A charged particle moves in a plane perpendicular to a uniform magnetic field \vec{B} .

(a) The orbit of a charged particle in a uniform magnetic field

A charge moving at right angles to a uniform \vec{B} field moves in a circle at constant speed because \vec{F} and \vec{v} are always perpendicular to each other.



Si la vitesse initiale de la particule est perpendiculaire à \vec{B} , le mouvement est **circulaire uniforme**. Si l'on admet ce résultat (que l'on a justifié en cours) il est facile de retrouver le rayon de la trajectoire

En effet, pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération vaut (figure 27-17) : $\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$.

L'application du principe fondamental de la dynamique donne : $-m \frac{v^2}{R} \vec{u}_r = -|q|vB \vec{u}_r$ soit : $R = \frac{mv}{|q|B}$

• Application

Spectromètre de masse en physique nucléaire pour séparer

les particules selon leur valeur de $\frac{q}{m} = \frac{v}{qB}$.

On sélectionne en premier lieu les particules avec la même vitesse v .

Puis dans \vec{B} sélection suivant $\frac{q}{m}$, ce qui se traduit par des rayons différents.

3-Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

3-2 Mouvement hélicoïdal: quelques mots

Cas étudié: $\vec{v}_0 = \underbrace{v_0 \cos \alpha \vec{u}_z}_{\parallel \vec{B}} + \underbrace{v_0 \sin \alpha \vec{u}_x}_{\perp \vec{B}}$

Mouvement hélicoïdal = $\left\{ \begin{array}{l} \text{mouvement rectiligne uniforme selon } \vec{u}_z \\ + \\ \text{mouvement circulaire uniforme dans le plan } xOy \\ \text{avec } R = \frac{v_0}{|\omega|} = \frac{mv_0}{|q|B} \end{array} \right.$

Pas de l'hélice = $z(t+T) - z(t) = v_0 \cos \alpha = \frac{2\pi m v_0 \cos \alpha}{|q|B}$



La forme de ces éruptions solaires est une preuve de l'existence du champ magnétique solaire.

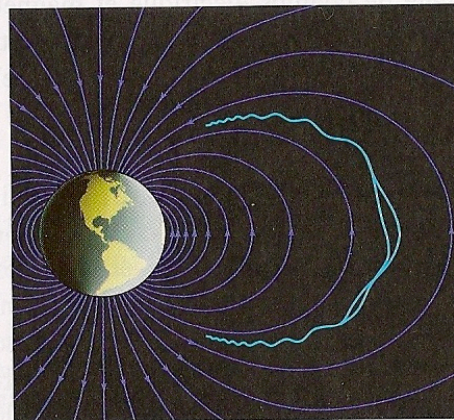
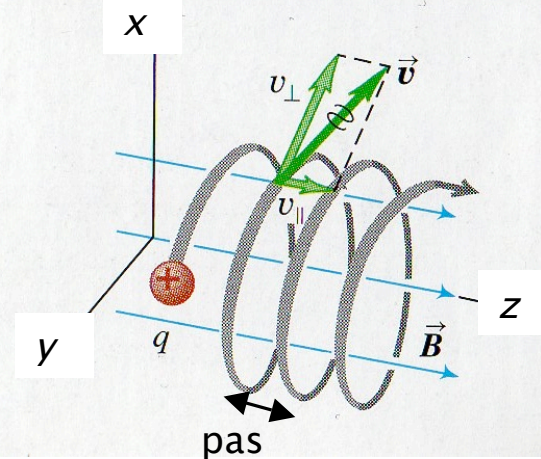


Figure 8.28 ▲ Les protons et les électrons de l'espace sont confinés par le champ magnétique terrestre.

27.18 The general case of a charged particle moving in a uniform magnetic field \vec{B} . The magnetic field does no work on the particle, so its speed and kinetic energy remain constant.

This particle's motion has components both parallel (v_{\parallel}) and perpendicular (v_{\perp}) to the magnetic field, so it moves in a helical path.



4-Application à l'électrocinétique: modèle classique de la conduction électrique

4-1 Description du phénomène

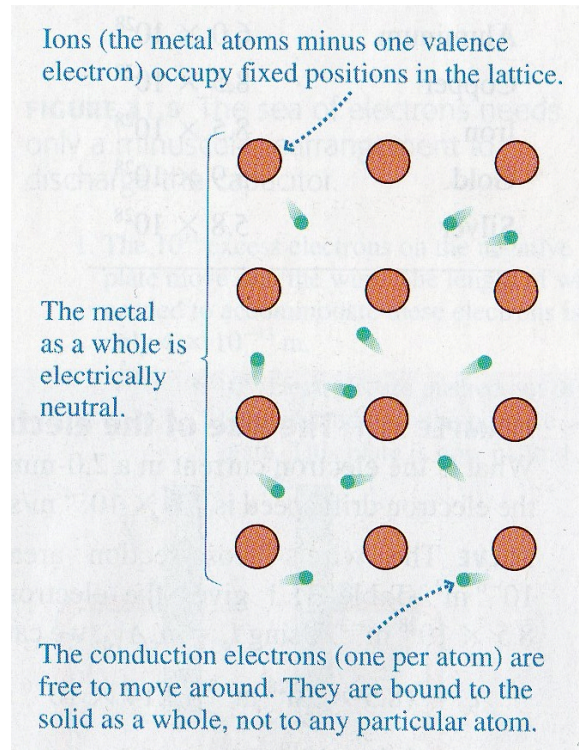
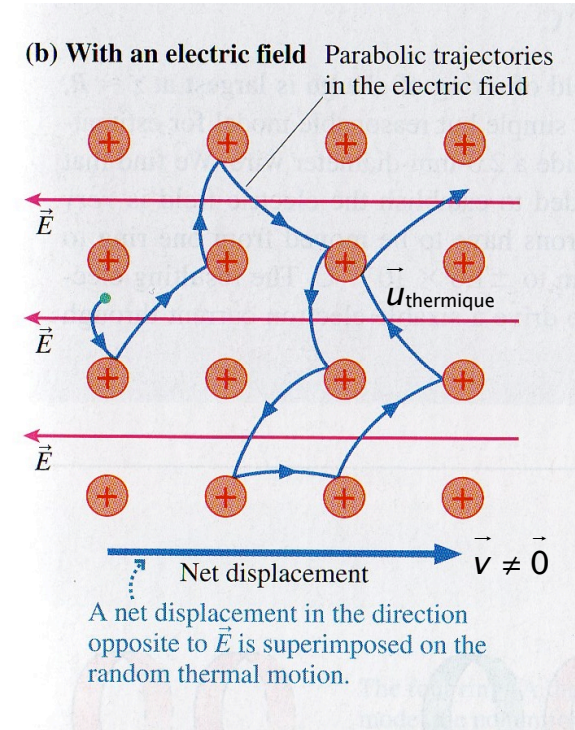
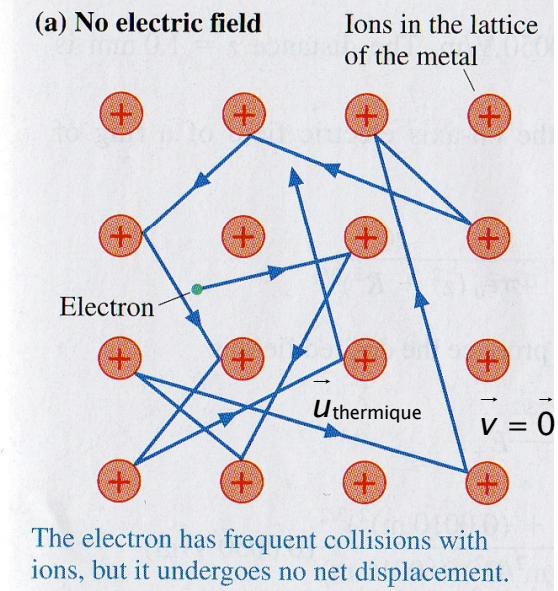


FIGURE 31.13 A microscopic view of a conduction electron moving through a metal.



n = nombre d'électrons par unité de volume Sans \vec{E} appliqué au métal: $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$

ρ = masse volumique du métal

$$n = \frac{\rho \times N_A}{A} = 8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \text{ pour le cuivre}$$

Entre deux chocs, à T ambiant

$\|\vec{u}_{\text{thermique}}\| \approx 10^6 \text{ m.s}^{-1}$, c'est l'**agitation thermique**.

Avec \vec{E} appliqué au métal: $\langle \vec{v} \rangle \neq \vec{0}$

Il y a un **mouvement d'ensemble ordonné** des électrons à $\|\vec{v}\| \approx 1 \text{ m.s}^{-1}$ qui s'ajoute à l'agitation thermique.

4-Application à l'électrocinétique: modèle classique de la conduction électrique

4-2 Le modèle de Drude (1900)

• Les hypothèses

- La conduction électrique dans un métal est assurée par les électrons de charge $-q$ et de masse m .
- Les interactions des électrons entre eux et avec les ions positifs du réseau cristallin sont modélisées par une force de frottement fluide du type $-k\vec{v}$ avec \vec{v} la vitesse des électrons et k une constante caractéristique du métal.
- on applique à $t = 0$ un champ électrique au métal $\vec{E} = E_0\vec{u}_z$. A $t = 0$, $\vec{v} = \vec{0}$.

• Application de la 2ème loi de Newton à un électron

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -q\vec{E} - k\vec{v} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = -\frac{q}{m}\vec{E} : \text{equation différentielle du 1}^{\text{er}} \text{ ordre bien connue}$$

On pose par définition: $\tau \equiv \frac{m}{k}$ homogène à un temps

$$\text{Solution: } \vec{v} = \frac{-q\tau E_0}{m} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \vec{u}_z$$

τ = temps de relaxation → caractérise la durée du régime transitoire

$$t \gg \tau : \vec{v} = \frac{-q\tau}{m} \vec{E} = \mu \vec{E} \text{ avec par définition: } \mu \equiv \frac{-q\tau}{m} = \text{la mobilité du porteur de charge}$$

μ est une caractéristique du conducteur étudié



Paul Karl Ludwig Drude (né le 12 juillet 1863 et mort le 5 juillet 1906) était un physicien Allemand. Il a écrit en son temps un livre fondamental intégrant l'optique et les équations de Maxwell.

4-Application à l'électrocinétique: modèle classique de la conduction électrique

4-3 Vecteur densité de courant, loi d'Ohm locale et globale

- On considère un conducteur cylindrique, section S , longueur ℓ et soumis à \vec{E} .
 Soit n la densité des porteurs de charge de charge q .
 Nombre de porteurs qui traversent S pendant $dt = nSv dt$
 Quantité de charge qui traversent S pendant dt : $dq = qnSv dt$

$$I \equiv \frac{dq}{dt} = (qnv)S = j \times S$$

Par définition: $\vec{j} \equiv nq\vec{v} =$ vecteur densité de courant en $A.m^{-2}$
 De façon général: $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$

- On a obtenu précédemment: $\vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$ soit :

$\vec{j} = \sigma\vec{E}$ LOI D'OHM LOCALE
 avec $\sigma =$ conductivité électrique en $S.m^{-1}$

Dans notre modèle simple : $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$

Même loi physique
 exprimer sous
 deux formes
 différentes

$U = RI$ LOI D'OHM GLOBALE OU INTEGRALE
 avec $R =$ résistance électrique en $\Omega^{-1} = S$

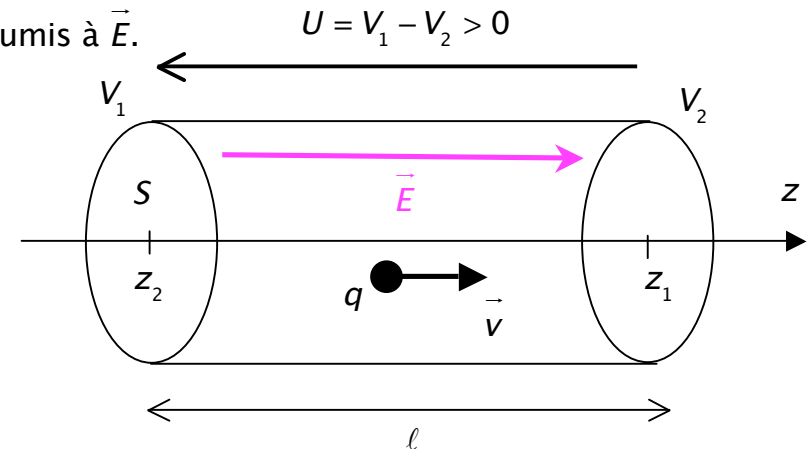
Dans notre modèle simple : $R = \frac{\ell}{\sigma S}$

$$R = \text{résistance en } \Omega = S^{-1} \leftrightarrow \rho = \text{résistivité en } \Omega.m = S^{-1}.m$$

$$G = 1/R = \text{conductance en } S = \Omega^{-1} \leftrightarrow \sigma = 1/\rho = \text{conductivité en } S.m^{-1} = \Omega.m^{-1}$$

A.N pour le cuivre: $\sigma = 6,2 \times 10^7 S.m^{-1}$ et $\tau = 2,5 \times 10^{-14} s$. Pour les métaux $\sigma \searrow$ quand $T \nearrow$

Le modèle de Drude ne peut pas tout expliquer. Par exemple, pourquoi il y a des porteurs de charge avec $q > 0$, pourquoi parfois (cas des semi-conducteur) $\sigma \nearrow$ quand $T \nearrow$. Seul la physique quantique donne une explication complète de la conduction dans les solides.



$$\vec{E} = -\text{grad}V \Rightarrow \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E(z_2 - z_1) = -(V_2 - V_1) = U$$

$$E = \frac{U}{\ell} = \frac{j}{\sigma} \Rightarrow U = \frac{\ell}{\sigma S} I$$

5-Modèle classique de l'effet Hall

5-1 Observation du phénomène

Un mince ruban métallique, parcouru par un courant électrique, est soumis à un champ magnétique qui lui est perpendiculaire (cf figure).

⇒ Apparition d'une tension $U_H \equiv V_1 - V_2 = R_H \frac{IB}{a}$

R_H = constante de Hall.

A.N pour le cuivre: Si $B \approx 1$ T (important), $I \approx 10$ A

⇒ $R_H = 10^{-10}$ S.I (très faible) et $U_H = 10 \mu V$

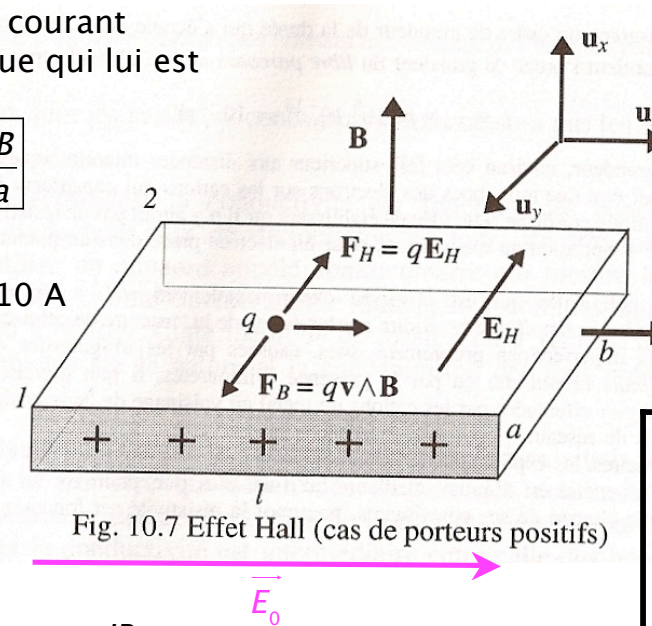


Fig. 10.7 Effet Hall (cas de porteurs positifs)



Edwin Herbert Hall (né le 7 novembre 1855 et mort le 20 novembre 1938) était un physicien Américain. Il a aussi écrit beaucoup de manuels de cours en physique et en chimie ainsi que des manuels de travaux pratiques.

5-2 Modèle

Soit un porteur de charge avec $q > 0$ et vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_z$

• $\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qvB\vec{u}_y$ avec $v = j/nq = I/nqab \Rightarrow \vec{F}_B = \frac{IB}{nab}\vec{u}_y$

Il y a accumulation de charges + sur la face 1 et - sur le face 2

⇒ Apparition d'un champ électrique dit de Hall $\vec{E}_H = E_H\vec{u}_y$

• Apparition de $\vec{F}_H = qE_H\vec{u}_y$ qui s'oppose à \vec{F}_B . Après le régime transitoire,

$\vec{F}_B + \vec{F}_H = 0 \Leftrightarrow \frac{IB}{nab} + qE_H = 0 \Rightarrow E_H = -\frac{IB}{nqab}$

• $U_H = (V_1 - V_2) = \int_1^2 \left(\underbrace{\vec{E}_0}_{\text{Génère } I, \perp \text{ à } d\vec{\ell}} + \vec{E}_H \right) \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 \left(\underbrace{E_0\vec{u}_z}_{\text{Génère } I, \perp \text{ à } d\vec{\ell}} + E_H\vec{u}_y \right) \cdot dy\vec{u}_y = -bE_H \Rightarrow R_H = \frac{1}{nq}$

5-Modèle classique de l'effet Hall

5-3 Comparaison avec l'expérience

- Pour le cuivre:

$$q = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}, n = -8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_H &= \frac{1}{nq} = -0,7 \times 10^{-10} \text{ S.I} \\ \Rightarrow R_H (\text{expérimentale}) &= -0,5 \times 10^{-10} \text{ S.I} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow R_H &= \frac{1}{nq} = -0,7 \times 10^{-10} \text{ S.I} \\ \Rightarrow R_H (\text{expérimentale}) &= -0,5 \times 10^{-10} \text{ S.I} \end{aligned}} \right\} \text{Bon accord}$$

- Pour certains métaux, $R_H > 0$, ce que ce modèle ne peut pas expliquer.

Seul la physique quantique peut donner une description complète des phénomènes électriques dans les solides.

5-4 Applications

- Sonde à Effet Hall: mesure de B

Il faut partir de $U_H = R_H \frac{IB}{a}$ avec R_H une caractéristique du milieu conducteur.

Si on connaît I et a , on mesure U_H et on en déduit la valeur de B par : $B = \frac{aU_H}{IR_H}$

Pour les métaux la valeur de R_H est trop faible, on utilise des sondes à semi-conducteur, R_H est plus important.

- Mesure du signe de la charge des porteurs de charge

$U_H \equiv V_1 - V_2 = R_H \frac{IB}{a} = \left(\frac{1}{nq} \right) \frac{IB}{a}$. On mesure U_H avec un voltmètre.

Si $U_H > 0$ $q > 0 \rightarrow$ cas des "trous" dans les semi-conducteurs.

Si $U_H < 0$ $q < 0 \rightarrow$ cas des électrons dans les métaux.